

A Valószínűségszámítás I. előadásorozat ötödik előadása.

2002 február 26.

Összefoglaló:

A várható érték tulajdonságainak bizonyításánál szükségünk van az alábbi segédtételre, mely megegyezik a Fazekas könyvben szereplő 2.6 Állítással a 61. oldalon.

Segédtétel. Legyen ξ egy diszkrét valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, mely valamilyen x_1, x_2, \dots , értékeket vesz fel, és legyen $B_k = \{\omega : \xi(\omega) = x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, a ξ valószínűségi változó értékei által meghatározott teljes eseményrendszer. Legyen C_j , $j = 1, 2, \dots$, egy ennél finomabb teljes eseményrendszer, azaz tegyük fel, hogy a $C_j \in \mathcal{A}$ halmazok diszjunktak, $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = \Omega$, és minden C_j halmazhoz tartozik olyan B_k halmaz, melyre $C_j \subset B_k$. Ha $C_j \subset B_k$, akkor rendeljük hozzá a C_j halmazhoz az $y_j = x_k$ számot. A $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ és $\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összegek egyszerre abszolút konvergenssek, és ha ezek az összegek abszolút konvergenssek, akkor

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j).$$

Bizonyítás: Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ összeg abszolút konvergens, azaz létezik olyan $L < \infty$ szám, melyre $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(B_k) = L$ akkor minden N indexre

$$\sum_{j=1}^N |y_j| P(C_j) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(B_k) = L.$$

Ezért $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(C_j) \leq L$, azaz a $\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összeg is abszolút konvergens.

Ha a $\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j)$ összeg abszolút konvergens, akkor $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(C_j) \leq L < \infty$ alkalmas L számmal, ahonnan tetszőleges N indexre

$$\sum_{k=1}^N |x_k| P(B_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{j: C_j \subset B_k} |y_j| P(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| P(C_j) \leq L < \infty,$$

ahonnan a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k)$ összeg is abszolút konvergens. Ezzel bekáttuk, hogy a két tekintett összeg egyszerre abszolút konvergens.

Ha a fenti sorok abszolút konvergensek akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ index, hogy $\sum_{k=N}^{\infty} |x_k|P(B_k) < \varepsilon$. Ekkor

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j: C_j \subset B_k} |y_j|P(C_j) < \varepsilon.$$

Legyen $U_k = \{j: C_j \subset B_k\}$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra. Ekkor minden U_k halmaznak van olyan véges $V_k = V_k(\varepsilon) \subset U_k$ részhalmaza, melyre

$$|x_k| \sum_{j \in U_k \setminus V_k} P(C_j) \leq \varepsilon 2^{-k}$$

Ekkor

$$\left| \sum_{j: j \in V_k} y_j P(C_j) - \sum_{j: C_j \subset B_k} y_j P(C_j) \right| \leq \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \quad k = 1, 2, \dots,$$

és

$$\left| \sum_{j: j \in V_k} y_j P(C_j) - x_k P(B_k) \right| \leq \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \quad k = 1, 2, \dots,$$

ahonnan

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in V_k} y_j P(C_j) \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j \in V_k} |y_j| P(C_j) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \leq 2\varepsilon,$$

és

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in V_k} y_j P(C_j) \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |x_k| P(B_k) + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j \in U_k \setminus V_k} |y_j| P(C_j) \leq 2\varepsilon.$$

Innen

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(C_j) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(B_k) \right| \leq 4\varepsilon.$$

Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra érvényes, innen következik a Segédteétel állítása.

Az előző előadásban megfogalmazott $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$ reláció bizonyítása.

Ha a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók x_1, x_2, \dots értékeket vesznek fel, akkor tekintsük az $\{\omega: \xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k\}$, $j, k = 1, 2, \dots$, eseményeket. A Segédteétel alapján

$$E\xi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_j P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k),$$

és

$$E\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k).$$

E két azonosságot összeadva, és alkalmazva megint a Segédtelet kapjuk, hogy

$$E\xi_1 + E\xi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (x_j + x_k) P(\xi_1 = x_j, \xi_2 = x_k) = E(\xi_1 + \xi_2),$$

mert az $\{\omega: \xi_1(\omega) = x_j, \xi_2(\omega) = x_k\}$, $j, k = 1, 2, \dots$, halmazok egy finomítását adják az $\{\omega: \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) = y\}$, ($y = x_j + x_k$ alkalmas x_j és x_k számmal) alakú halmazokból álló partíciónak.

Tétel. Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó, mely bizonyos x_1, x_2, \dots értéket vesz fel és $g(x)$ valós függvény. Ekkor

$$Eg(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j),$$

feltéve, hogy a $\sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j)$ összeg abszolút konvergens.

Bizonyítás: Vezessük be az $x_u \sim x_v$ relációt, ha $g(x_u) = g(x_v)$. Ekkor \sim ekvivalenciareláció, és az x_1, x_2, \dots , értékeket megszámlálható sok D_1, D_2, \dots , osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy x_u és x_v akkor kerül ugyanabba az osztályba, ha $x_u \sim x_v$. Defináljuk a z_k számot úgy, hogy legyen $z_k = g(x_u)$, ha $x_u \in D_k$. Vezessük be továbbá a $B_k = \{\omega: \xi(\omega) \in D_k\}$ és $C_j = \{\omega: \xi(\omega) = x_j\}$ halmazokat az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Ekkor a várható érték definíciója illetve a Segédtelet alapján

$$Eg(\xi) = \sum_k z_k P(C_k) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j),$$

feltéve, hogy a $\sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) P(\xi = x_j)$ összeg abszolút konvergens.

Tétel Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, diszkrét valószínűségi változók melyek mindegyikére létezik az $E\xi_j$, $1 \leq j \leq n$ várható érték. Ekkor az $E\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n$ várható érték is létezik, és

$$E\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n.$$

Megjegyzés: A fent megfogalmazott eredmény rendkívül fontos tulajdonsága a független valószínűségi változóknak. A Fazekas könyvben ez az eredmény csak az $n = 2$ esetben van megfogalmazva a 2.21 Tételben a 66. oldalon. Ha jól tudunk számolni független valószínűségi változókkal, akkor az általános eredmény visszavezethető erre a speciális esetre, de egyszerűbbnek láttam közvetlenül az általános esettel foglalkozni.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók x_1, x_2, \dots , értékeket vesznek fel. Ekkor

$$\begin{aligned} E\xi_1 \cdots E\xi_n &= \sum_{j_1=1}^{\infty} x_{j_1} P(\xi_1 = x_{j_1}) \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_n} P(\xi_n = x_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1} \cdots x_{j_n} P(\xi_1 = x_{j_1}) \cdots P(\xi_n = x_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=1}^{\infty} x_{j_1} \cdots x_{j_n} P(\xi_1 = x_{j_1}, \dots, \xi_n = x_{j_n}), \end{aligned}$$

a ξ_j , $1 \leq j \leq n$ valószínűségi változók függetlensége miatt, valamint azért mert a fenti sorok mindegyike abszolút konvergens. (Ugyanis abszolút konvergens sorok szorzata is abszolút konvergens.) Viszont a Segédétel alapján a fenti azonosság jobboldalán szereplő kifejezés $E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n$, ezért

$$E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n = E\xi_1 E\xi_2 \cdots E\xi_n.$$

A szórásnégyzet fogalma.

Azt hogy valószínűségi változók körülbelül mekkora értéket vesznek fel az (egyelőre csak diszkrét valószínűségi változók esetén tárgyalt) várható érték méri megfelelő módon. Annak mérésére, hogy mekkora a valószínűségi változó ingadozása a várható értéke körül vezették be a szórásnégyzet (angolul variance) fogalmát. Ennek definíciója a következő:

A szórásnégyzet definíciója: Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét az

$$\text{Var } \xi = E(\xi - E\xi)^2$$

képlet definiálja. Ha $E\xi^2 = \infty$ akkor a $\text{Var } \xi$ szórásnégyzetet nem definiáljuk vagy azt mondjuk, hogy $\text{Var } \xi = \infty$.

Lemma.

$$\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Továbbá, $(E\xi)^2 \leq E\xi^2$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var } \xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) \\ &= E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E\xi^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 \end{aligned}$$

a várható érték tulajdonságai miatt. Összehasonlítva a bal és jobboldalt kapjuk a megfogalmazott egyenlőtlenséget.

Megjegyzés: Ha precízek vagyunk felmerülhet a kérdés, teljesen kifogástalan-e a fenti bizonyítás. Az okozhat esetleg problémát, hogy csak akkor definiáltuk a várható értéket, ha a definiáló összeg abszolút konvergens. Ezt viszont csak az $E\xi^2$ -ről tettük fel, ugyanakkor az $E\xi$ -vel is szabadon számoltunk. Nem okoz-e ez gondot?

Az, hogy a fenti számolás jogos, például a következő módon látható. Vegyen fel a ξ valószínűségi változó x_1, x_2, \dots értékeket, és definiáljuk a ξ valószínűségi változó ξ_n közelítéseit, $n = 1, 2, \dots$, a következő módon: $\xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, ha $\xi(\omega) = x_k$, $1 \leq k \leq n$, $\xi_n(\omega) = 0$, ha $\xi(\omega) = x_k$, és $k > n$. Ekkor a $\xi_n(\omega)$ illetve ennek abszolút értékével a $|\xi_n(\omega)|$ valószínűségi változókkal szabadon végrehajthatjuk a fenti számolásokat. Innen következik, hogy $(E|\xi_n(\omega)|)^2 \leq E\xi_n^2(\omega) \leq E\xi^2(\omega)$. Innen viszont $n \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $(E|\xi|)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (E|\xi_n(\omega)|)^2 \leq E\xi^2(\omega)$. Ez azt jelenti, hogy az $E\xi$ várható értéket meghatározó összeg is abszolút konvergens, és a fenti számolásokat elvégezhetjük.

Feladat:

Minden m valós számra

$$E(\xi - m)^2 = E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2.$$

Következésképpen

$$\text{Var } \xi = \inf_{-\infty < m < \infty} E[(\xi - m)^2].$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} E(\xi - m)^2 &= E[(\xi - E\xi) + (E\xi - m)]^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 - 2E(\xi - m)E(\xi - E\xi) + E(\xi - m)^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2, \end{aligned}$$

mert $2E(\xi - m)E(\xi - E\xi) = 2E(\xi - m)(E\xi - E\xi) = 0$. Ebből az azonosságból adódik, hogy $E(\xi - m)^2 \geq E(\xi - E\xi)^2$ minden m valós számra. Viszont $m = E\xi$ esetén az egyenlőtlenség két oldala megegyezik.

Lemma. Minden a és b valós számra

$$\text{Var}(a\xi + b) = a^2 \text{Var } \xi.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a\xi + b) &= E[(a\xi + b) - E(a\xi + b)]^2 = E[(a\xi + b) - aE(\xi - b)]^2 \\ &= E[a^2(\xi - E\xi)^2] = a^2 E(\xi - E\xi)^2 = a^2 \text{Var } \xi. \end{aligned}$$

A következő eredmény rendkívül hasznos összefüggést ad, ha független valószínűségi változók összegének szórásnégyzetét akarjuk kiszámítani. Hangsúlyozzuk, hogy ebben

az eredményben fontos a tekintett valószínűségi változók függetlensége. Később megfogalmazzuk ezen eredmény egy olyan általánosítását, amelyik akkor is érvényes, ha az összeadandók nem feltétlenül függetlenek. Látni fogunk olyan példákat is, melyek megoldásában ezt az általánosabb eredményt érdemes alkalmazni.

Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, akkor

$$\text{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \text{Var} \xi_1 + \text{Var} \xi_2 + \dots + \text{Var} \xi_n.$$

Következmény. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, c_1, c_2, \dots, c_n valós számok, akkor

$$\text{Var}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_n\xi_n) = c_1^2\text{Var} \xi_1 + c_2^2\text{Var} \xi_2 + \dots + c_n^2\text{Var} \xi_n.$$

A Tétel bizonyítása. Vezessük be a $\bar{\xi}_j = \xi_j - E\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor

$$\begin{aligned} \text{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) &= E(\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \dots + \bar{\xi}_n)^2 \\ &= E\left(\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \dots + \bar{\xi}_n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^n \bar{\xi}_j\bar{\xi}_k\right) \\ &= E\bar{\xi}_1^2 + E\bar{\xi}_2^2 + \dots + E\bar{\xi}_n^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^n E\bar{\xi}_j\bar{\xi}_k \\ &= E\bar{\xi}_1^2 + E\bar{\xi}_2^2 + \dots + E\bar{\xi}_n^2 = \text{Var} \xi_1 + \text{Var} \xi_2 + \dots + \text{Var} \xi_n, \end{aligned}$$

mert $E\bar{\xi}_j\bar{\xi}_k = E\xi_j E\xi_k = 0$ minden $1 \leq j < k \leq n$ számra a ξ_j illetve a $\bar{\xi}_j$, $1 \leq j \leq n$, valószínűségi változók függetlensége miatt.

Feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a szórásnégyzetet kifejező összeget másrészt egyszerűbben az előző tétel segítségével.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobás-eredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ független valószínűségi változók, melyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \leq j \leq 100$, $1 \leq k \leq 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\text{Var} \sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} \text{Var} \eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+$

$$4 + 5 + 6) = 3.5, E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}, \text{Var } \eta_j = \frac{35}{12}, E\xi = 350, \\ \text{Var } \xi = \frac{3500}{12}.$$

Megfogalmazzuk az előző tétel egy olyan általánosítását, mely lehetővé teszi, hogy kiszámoljuk nem feltétlenül független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetét. Ennek érdekében először be kell vezetnünk egy új fogalmat, két valószínűségi változó kovarianciafüggvényét. Ez azt méri hogy milyen erős a kapcsolat két valószínűségi változó között.

A kovarianciafüggvény definíciója. Legyen ξ és η két valószínűségi változó, melyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, azaz $E\xi^2 < \infty$ és $E\eta^2 < \infty$. Ekkor a ξ és η kovarianciafüggvényét $\text{Cov}(\xi, \eta)$ -t a

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)]$$

kifejezés definiálja. Ha a $E\xi^2 < \infty$ és $E\eta^2 < \infty$ feltételek valamelyike nem teljesül, akkor nem definiáljuk a $\text{Cov}(\xi, \eta)$ kovarianciafüggvényt.

Megjegyzés: $|(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)| \leq \frac{|\xi - E\xi|^2}{2} + \frac{|\eta - E\eta|^2}{2}$, ahonnan $E|(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)| \leq \frac{E|\xi - E\xi|^2}{2} + \frac{E|\eta - E\eta|^2}{2} < \infty$. Innen következik, hogy az $E\xi^2 < \infty$ és $E\eta^2 < \infty$ feltételek teljesülése esetén a $\text{Cov}(\xi, \eta)$ -t definiáló várható érték valóban létezik.

Lemma.

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Következmény. Ha ξ és η két független valószínűségi változó, akkor $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

Lemma bizonyítása.

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E[\xi\eta - \eta E\xi - \xi E\eta + E\xi E\eta] = E\xi\eta - E\xi E\eta - E\xi E\eta + E\xi E\eta = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Most megfogalmazzuk az alábbi eredményt valószínűségi változók összegének a szórásnégyzetéről:

Tétel. Ha ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, melyek mindegyikének létezik szórásnégyzete, akkor

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \right) &= \sum_{j=1}^n \text{Var } \xi_j + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (E\xi_j \xi_k - E\xi_j E\xi_k) \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Var } \xi_j + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\text{Cov}(\xi_j, \xi_k)) \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Var } \xi_j + \sum_{1 \leq j, k \leq n, j \neq k} (\text{Cov}(\xi_j, \xi_k)). \end{aligned}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \right) &= E \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \right)^2 - \left(E \sum_{j=1}^n \xi_j \right)^2 = E \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \xi_j \xi_k \right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n E \xi_j E \xi_k \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n E \xi_j \xi_k \right) - \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n E \xi_j E \xi_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (E \xi_j^2 - (E \xi_j)^2) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (E \xi_j \xi_k - E \xi_j E \xi_k). \end{aligned}$$

és $E \xi_j^2 - (E \xi_j)^2 = \text{Var} \xi_j$, $E \xi_j \xi_k - E \xi_j E \xi_k = \text{Cov}(\xi_j, \xi_k)$.

Megmutatjuk a (részben a gyakorlaton), hogy a fenti eredmény segítségével viszonylag egyszerűen meg tudjuk oldani a következő két feladatot.

Feladat:

Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j , $1 \leq j \leq 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j -ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j -ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E \xi_j = E \xi_1 = \frac{2}{5}$, $\text{Var} \xi_j = \text{Var} \xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E \xi_j \xi_k - E \xi_j E \xi_k = E \xi_1 \xi_2 - E \xi_1 E \xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \neq k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$ és szórásnégyzete $20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot \frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

Feldobunk egy dobókockát, majd ezután egy szabályos pénzdarabot annyi alkalommal, amennyi a kockadobás eredménye volt. (Az egyes dobások eredményei függetlenek egymástól.) Számoljuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Vágül tárgyaltuk azt, hogyan lehet kiszámolni független, diszkrét eloszlású valószínűségi változók összegének az eloszlását, majd definiáltuk diszkrét valószínűségi változók eloszlásainak a konvolúcióját, és néhány megjegyzést tettünk ezzel kapcsolatban.

Legyen ξ és η két független, diszkrét valószínűségi változó, melyek valamilyen x_1, x_2, \dots értékeket vesznek fel. Ekkor ezek összege a $\xi + \eta$ valószínűségi változó szintén

diszkrét és eloszlását ki tudjuk számolni a következő módon:

$$P(\xi + \eta = x) = \sum_{(x_j, x_k): x_j + x_k = x} P(\xi_j = x_j, \eta = x_k) = \sum_{(x_j, x_k): x_j + x_k = x} P(\xi_j = x_j)P(\eta = x_k)$$

Ez a képlet egyszerűsödik abban a fontos speciális esetben, ha a független ξ és η valószínűségi változók csak egész értékeket vesznek fel, és még egyszerűbb, ha csak nem negatív egész értékeket vesznek fel. Azt az eredményt, melyet ebben a speciális esetben kapunk fogalmazzuk meg tétel formájában.

Tétel. *Legyen ξ és η két független, egész értékeket felvevő valószínűségi változó. Ekkor a $\xi + \eta$ valószínűségi változó is csak egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = k)P(\eta = n - k), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ez a formula tovább egyszerűsödik, ha a független ξ és η valószínűségi változók csak nem negatív egész értékeket vesznek fel. Ekkor

$$P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=0}^n P(\xi = k)P(\eta = n - k), \quad \text{ha } n \geq 0,$$

és

$$P(\xi + \eta = n) = 0, \quad \text{ha } n < 0.$$

Bizonyítás: A tétel első képlete azonnal adódik a tétel előtt tárgyalt általános esetből abban az esetben, ha a valószínűségi változók x_1, x_2, \dots értékei egész számok. A második képlet az első képlet következménye, ha észrevesszük, hogy elég csak azon $(k, n - k)$ párokra összegezni, melyekre $P(\xi = k)P(\eta = n - k) \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha ξ és η nem negatív egészeket vesznek fel, akkor az összegezésből kihagyhatjuk azokat a tagokat, melyekre $k < 0$ vagy $n - k < 0$, azaz $k > n$.

A fenti eredmény miatt érdemes bevezetni a következő definíciót.

Diszkrét, egész értékű eloszlások konvolúciójának a definíciója. *Legyen*

$$\mathcal{P} = \{p_k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{és} \quad \mathcal{Q} = \{q_k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

*két az egész számokon értelmezett diszkrét eloszlás, azaz tegyük fel, hogy $p_k \geq 0, q_k \geq 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$ és $\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k = 1$. Ekkor a \mathcal{P} és \mathcal{Q} eloszlások konvolúciója, az a $\mathcal{R} = \mathcal{P} * \mathcal{Q} = \{r_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ eloszlás, melyre*

$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k q_{n-k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Abban a speciális esetben, ha $p_k = 0$ és $q_k = 0$ $k < 0$ esetén, akkor $r_n = 0$ $n < 0$ esetén, és

$$r_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Érdemes a következő észrevételt tenni. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két függvény, melyek hatványsorba fejthetőek, azaz,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

ha $-A < x < A$ valamilyen $A > 0$ számmal. Ekkor az $f(x)g(x)$ szorzat is sorba fejthető, azaz

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(ugyanabban a $-A < x < A$ intervallumban), és

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Vegyük észre, hogy a fenti hatványsorokban szereplő a_k , b_k és c_n együtthatók között hasonló reláció érvényes mint ami a konvolúció definíciójában szerepelt. Ezekíven érdemes tudni a következő analízisben bizonyított eredményeket.

- a.) Ha az $f(x)$ függvény hatványsorba fejthető, azaz $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ valamilyen $-A < x < A$ intervallumon, $A > 0$, akkor az $f(x)$ függvény értékei a $-A < x < A$ intervallumon meghatározzák az a_n együtthatókat. (Sőt azok explicit módon kiszámíthatóak az $n!a_n = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0}$ képlet segítségével.)
- b.) Ha $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, függvényeknek egy olyan sorozata melyek mindegyike előállítható $f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} x^k$ hatványsor alakban valamilyen $-A < x < A$, $A > 0$ intervallumon, ahol az $A > 0$ szám nem függ az n indextől, továbbá létezik az $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték minden $-A < x < A$ számra, akkor az $f(x)$ határfüggvény is hatványsorba fejthető $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban a $-A < x < A$ intervallumon. Továbbá $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ együtthatóra.

Később látni fogjuk, hogy a hatványsorok fent említett tulajdonságai jól használhatóak bizonyos valószínűségi vizsgálatokban. Ugyanis egy nem-negatív egész értékeket felvevő ξ valószínűségi változó $p_k = P(\xi = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, eloszlásához hozzárendelhetjük az $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ függvényt, melyet ezen eloszlás generátorfüggvényének

neveznek. Látni fogjuk, hogy a generátorfüggvények tulajdonságai, például az, hogy ezek együtthatóit a differenciálszámítás segítségével is kiszámíthatjuk, lehetővé teszi, hogy a generátorfüggvények segítségével bizonyos valószínűségi problémákat egyszerűbben oldhassunk meg.