

A Valószínűségszámítás I. előadássorozat kilencedik előadása.

2002 április 2.

Összefoglaló:

A többdimenziós sűrűségfüggvények bevezetése után definiáljuk a több-dimenziós tér halmazaira koncentrált egyenletes eloszlást. Ezután határozzuk meg az egyenletes eloszlást néhány egyszerű esetben.

Többdimenziós halmazokra koncentrált egyenletes eloszlás definíciója. Legyen adva egy $A \subset R^k$ (Borel mérhető) halmaz a k -dimenziós téren, melynek Lebesgue mértéke teljesíti a $\lambda(A) > 0$ feltételt. Az A -halmazon definiált egyenletes eloszlás az a P valószínűségi mérték az R^k tér Borel mérhető részhalmazain, melyre $P(B) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$ minden Borel mérhető halmazra a k -dimenziós téren. Másképp megfogalmazva, az A halmazra koncentrált egyenletes eloszlás az az eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye $f(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{\lambda(A)}$, ha $(u_1, \dots, u_k) \in A$, és $f(u_1, \dots, u_k) = 0$, ha $(u_1, \dots, u_k) \notin A$.

Feladat:

Adjuk meg a $[0, 1 \times \dots \times [0, 1]$ k -dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ csúcspontok által meghatározott háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek sűrűségfüggvényét.

Független valószínűségi változók és szorzatuk várható értéke.

Valószínűségi változók függetlenségének a definíciója. Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden x_1, \dots, x_n valós számra

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Későbbi vizsgálatok érdekében vezessük be ennek a fogalomnak a többdimenziós változatát.

Többdimenziós valószínűségi változók függetlenségének a definíciója. Legyenek $\xi^{(1)} = (\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,k}), \dots, \xi^{(n)} = (\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k})$, k -dimenziós valószínűségi változók (vektorok) egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi vektorok függetlenek, ha minden $x^{(1)} = (x_{1,1}, \dots, x_{1,k}), \dots, x^{(n)} = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$, k -dimenziós vektorra

$$\begin{aligned} P(\xi_{1,1} < x_{1,1}, \dots, \xi_{1,k} < x_{1,k}, \dots, \xi_{n,1} < x_{n,1}, \dots, \xi_{n,k} < x_{n,k}) \\ = P(\xi_{1,1} < x_{1,1}, \dots, \xi_{1,k} < x_{1,k}) \cdots P(\xi_{n,1} < x_{n,1}, \dots, \xi_{n,k} < x_{n,k}). \end{aligned}$$

Megjegyzés: Többdimenziós valószínűségi változók függetlenségének a definíciójában semmilyen függetlenségi feltevést nem tettünk az egyes $\xi^{(j)} = (\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,k})$, $1 \leq j \leq n$, vektorok koordinátái között. Ezzel a definícióval egyelőre nem kell foglalkozni.

Független valószínűségi változókkal való számolást megkönnyíti a mértékelmélet egyik alapvető eredménye, a Fubini tételt. Ennek megfogalmazása előtt teszünk néhány megjegyzést.

A Fubini tétel a következő, a területi (Riemann-)integrálról szóló eredménynek általánosítása általános Lebesgue integrálokra.

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy$$

minden integrálható $f(\cdot, \cdot)$ függvényre. Ez az eredmény azt jelenti, hogy egy kétváltozós függvény területi integrálját úgy is kiszámolhatjuk, hogy először rögzítjük az egyik paramétert, (melyet y -nal jelöltünk,) és kiszámítjuk az így kapott egyváltozós integrált. Ezután az első lépésben rögzített paraméter szerint integrálva az így kapott függvényt, megkapjuk a területi integrál értékét. Ez azt jelenti, hogy a területi integrál kiszámítható két egyszeres integrál szukcessziv alkalmazásának a segítségével.

A Fubini tétel megfogalmazása előtt fogalmazzuk meg a következő eredményt.

Feladat:

Legyenek $F_1(\cdot), \dots, F_k(\cdot)$ eloszlásfüggvények a számegyenesen, és definiáljuk az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvényt. Ez az $F(x_1, \dots, x_k)$ függvény k -változós eloszlásfüggvény.

Részletesebben kifejtve a következőt állítjuk. A hetedik és nyolcadik előadásban megadtuk a szükséges és elégséges feltételét annak hogy egy egydimenziós illetve többdimenziós függvény eloszlásfüggvény függvény legyen. Azt állítjuk, hogy ha az $F_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq k$, függvények teljesítik az (egydimenziós) eloszlásfüggvény jellemzését leíró tulajdonságokat, akkor az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvény teljesíti a többdimenziós eloszlásfüggvény eloszlását leíró tulajdonságokat.

Ha $F_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq k$, egydimenziós eloszlásfüggvények, akkor tekinthetjük az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ k -változós eloszlásfüggvényt, illetve az általa meghatározott $\mu_F = \mu_{(F_1, \dots, F_k)}$ Stieltjes mértéket a k -dimenziós téren. Az irodalomban általános szokás, hogy az előbb definiált μ_F k -dimenziós téren értelmezett mérték szerinti integrált $F_1(dx_1) \dots F_k(dx_k)$ vagy $dF_1(x_1) \dots dF_k(x_k)$ -val jelölik, azaz

$$\int g(x_1, \dots, x_k) \mu_F(dx_1, \dots, dx_k) = \int g(x_1, \dots, x_k) \mu_{(F_1, \dots, F_k)}(dx_1, \dots, dx_k)$$

$$\stackrel{\text{jel.}}{=} \int g(x_1, \dots, x_k) F_1(dx_1) \dots F_k(dx_k) = \int g(x_1, \dots, x_k) dF_1(x_1) \dots dF_k(x_k)$$

tetszőleges integrálható $g(x_1, \dots, x_k)$ (integrálható) függvényre, ahol „jel.” a jelölés szó rövidítése. A továbbiakban mi is ezt a jelölést követjük.

Fubini tétel. *Legyenek $F_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq k$, eloszlásfüggvények a számegyenesen, és legyen $g(x_1, \dots, x_k)$ (mérhető) k -változós függvény. Ekkor*

$$\int g(x_1, x_2, \dots, x_k) F_1(dx_1) F_2(dx_2) \dots F_k(dx_k)$$

$$= \left(\int \dots \left(\int \left(\int g(x_1, \dots, x_k) F_1(dx_1) \right) F_2(dx_2) \right) \dots F_k(dx_k) \right).$$

Ez az azonosság úgy értendő, hogy az azonosság két oldalán lévő integrál illetve szukcessziv integrál egyszerre létezik.

Érdemes külön megfogalmazni ennek az azonosságnak a következő fontos speciális esetét. Ha $g(x_1, \dots, x_k) = g_1(x_1) \cdots g_k(x_k)$ alakú speciális függvények integrálját tekintjük, akkor a következő azonosságot írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} & \int g_1(x_1)g_2(x_2) \cdots g_k(x_k)F_1(dx_1)F_2(dx_2) \cdots F_k(dx_k) \\ &= \int g(x_1)F_1(dx_1) \int g_2(x_2)F_2(dx_2) \cdots \int g_k(x_k)F_k(dx_k) = \prod_{j=1}^k \int g_j(x)F_j(dx). \end{aligned}$$

1. megjegyzés: A Fubini tétel valójában egy általánosabb eredmény mint a most kimondott tétel. A Fubini tétel a megfogalmazottakhoz hasonló eredmény mond ki általános (és nemcsak az Euklideszi) terekben definiált szorzatmértékek szerinti integrálokra. Számunkra viszont elegendő csak a fent leírt speciális esetet tekinteni.

2. megjegyzés: Az előbb kimondott tételek és a további eredmények röviden, informálisan úgy foghatók össze, hogy mindazok az eredmények, melyeket független, diszkrét eloszlású valószínűségi változókról tanultunk, érvényben maradnak általános, nem feltétlenül diszkrét eloszlású valószínűségi változókra is.

Megmutatjuk, hogy a Fubini tételből és azokból a eredményekből, melyek megadják, hogy valószínűségi változók függvényeinek várható értékét hogyan lehet ki kiszámolni e valószínűségi változók eloszlásfüggvényének a segítségével be lehet bizonyítani néhány a független valószínűségi változókról szóló alapvető eredményt.

Tétel. Legyenek ξ_1, \dots, ξ_k független valószínűségi változók, melyek mindegyikének létezik várható értéke, azaz $E|\xi_j| < \infty$. Ekkor a $\xi_1 \cdots \xi_k$ szorzatnak is létezik várható értéke, és

$$E\xi_1 \cdots \xi_k = E\xi_1 \cdots E\xi_k.$$

Megjegyzés: Ezt az eredményt már láttuk korábban abban a speciális esetben, ha diszkrét valószínűségi változók szorzatát tekintjük.

A tétel bizonyítás: Jelölje $F_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq k$, a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és vezessük be a $g(x_1, \dots, x_k) = x_1 \cdots x_k$ függvényt. Ekkor

$$E\xi_1 \cdots \xi_k = Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int x_1 \cdots x_k F_1(dx_1) \cdots F_k(dx_k).$$

Továbbá a Fubini tétel szerint

$$\int x_1 \cdots x_k F_1(dx_1) \cdots F_k(dx_k) = \prod_{j=1}^k \int x F_j(dx).$$

Mivel $E\xi_j = \int xF_j(x)$, ez az azonosság azt jelenti, hogy $E\xi_1 \cdots \xi_k = E\xi_1 \cdots E\xi_k$. Ezenkívül azt is állíthatjuk (felhasználva azt a tényt, hogy a Fubini tétel két oldalán szereplő kifejezés egyszerre értelmes, hogy a Tételben szereplő azonosság két oldala egyszerre értelmes.

Tétel. *Legyenek ξ_1, \dots, ξ_k független valószínűségi változók, B_1, \dots, B_k a számegyenes Borel mérhető részhalmazai. Ekkor*

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k).$$

Megjegyzés: A függetlenség definíciója csak azt követeli meg, hogy a tételben kimondott azonosság teljesüljön speciális $B_j = (-\infty, x_j)$ alakú halmazokra. A tétel azt állítja, hogy ha ez az azonosság teljesül ezekre a speciális alakú halmazokra, akkor ez teljesül minden „szép” azaz Borel mérhető halmazra. A tétel egyik következménye az, hogy a diszkrét valószínűségi változók esetében már korábban definiált függetlenség megegyezik a függetlenség fogalmával az általános esetben.

Bizonyítás: Legyen $g_j(\cdot)$ a B_j halmaz indikátorfüggvénye, $1 \leq j \leq k$, azaz legyen $g_j(x) = 1$, ha $x \in B_j$, és $g_j(x) = 0$, ha $x \notin B_j$. Definiáljuk a $g(x_1, \dots, x_k) = g_1(x_1) \cdots g_k(x_k)$ függvényt a k -dimenziós téren. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) &= Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) = Eg_1(\xi_1) \cdots Eg_k(\xi_k) \\ &= P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k). \end{aligned}$$

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók, $g(x_1, \dots, x_n)$ n -változós (mérhető) függvény, $\eta = g(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Mutassuk meg a Fubini tétel segítségével, hogy $\eta, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók.

Feladat:

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j , $1 \leq j \leq n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$ -vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a (ξ_1, \dots, ξ_n) véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_n) = f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)$ függvény.

Független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete, a nagy számok gyenge törvénye.

A diszkrét valószínűségi változókhoz hasonlóan definiálhatjuk általános, nem feltétlenül diszkrét valószínűségi változók szórásnégyzetét, (ezt az előző előadáson megtettük), kovarianciáját, és (független) valószínűségi változók összegének szórásnégyzetére hasonló formula érvényes mint a diszkrét esetben. Röviden leírjuk a bizonyítást, bár azt akár el is hagyhatnánk arra hivatkozva, hogy a diszkrét valószínűségi változók esetében is csak olyan összefüggéseket használtunk, melyek általános valószínűségi változók esetében is érvényesek.

Valószínűségi változók kovarianciájának a definíciója. Legyen ξ és η két valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn, (melyekre teljesül az $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$ feltétel.) A ξ és η valószínűségi változók kovarianciafüggvénye

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)].$$

Lemma.

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi, \eta) &= E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E(\xi\eta - \xi E\eta - \eta E\xi + E\xi E\eta) \\ &= E\xi\eta - E\xi E\eta - E\xi E\eta + E\xi E\eta = E\xi\eta - E\xi E\eta. \end{aligned}$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $E\xi\eta = E\xi E\eta$, ezért $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

Tétel. Legyenek ξ_j , $1 \leq j \leq k$, valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn, melyekre teljesül $E\xi_j^2 < \infty$ feltétel. Ekkor

$$\text{Var} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j \right) = \sum_{j=1}^k \text{Var} \xi_j + \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq k \\ j \neq l}} \text{Cov}(\xi_j, \xi_l) = \sum_{j=1}^k \text{Var} \xi_j + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j+1}^k \text{Cov}(\xi_j, \xi_l).$$

Speciálisan, ha a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$\text{Var} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j \right) = \sum_{j=1}^k \text{Var} \xi_j.$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\bar{\xi}_j = \xi_j - E\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j \right) &= E \left(\sum_{j=1}^k \bar{\xi}_j \right)^2 = E \left(\sum_{j=1}^k \bar{\xi}_j^2 + \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq k \\ j \neq l}} \bar{\xi}_j \bar{\xi}_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^k E\bar{\xi}_j^2 + \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq k \\ j \neq l}} E\bar{\xi}_j \bar{\xi}_l = \sum_{j=1}^k \text{Var} \xi_j + \sum_{\substack{1 \leq j, l \leq k \\ j \neq l}} \text{Cov}(\xi_j, \xi_l). \end{aligned}$$

Ha a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, akkor $\text{Cov}(\xi_j, \xi_l) = 0$, ezért

$$\text{Var} \left(\sum_{j=1}^k \xi_j \right) = \sum_{j=1}^k \text{Var} \xi_j.$$

Legyenek ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, és legyen $E\xi_1^2 < \infty$. Becsüljük meg a Csebisev egyenlőtlenség segítségével a

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j - E\xi_1 \right| > \varepsilon \right)$$

valószínűségeket minden $n = 1, 2, \dots$ és $\varepsilon > 0$ számra. Látni fogjuk, hogy ebből a becslésből adódik a valószínűségszámítás egyik fontos eredménye, a nagy számok (gyenge) törvénye.

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j - E\xi_1 \right| > \varepsilon \right) &= P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\xi_j - E\xi_j) \right| > \varepsilon \right) \\ &= P \left(\left(\sum_{j=1}^n (\xi_j - E\xi_j) \right)^2 > n^2 \varepsilon^2 \right) \leq \frac{E \left(\sum_{j=1}^n (\xi_j - E\xi_j) \right)^2}{n^2 \varepsilon^2} \\ &= \frac{\text{Var} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \right)}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \text{Var} \xi_j}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{\text{Var} \xi_1}{n \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

A nagy számok (gyenge) törvényének bizonyítása előtt bevezetünk két definíciót.

Sztochasztikus konvergencia definíciója. *Legyenek ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy a ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak a ξ valószínűségi változóhoz, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$ minden $\varepsilon > 0$ számra.*

Megjegyzés: A mértékelméletben is megjelenik ez a fogalom, de ott ezt mértékben való konvergenciának nevezik.

Nagy számok gyenge törvényének a definíciója. *Legyen ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata egy valószínűségi mezőn, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $k = 1, 2, \dots$. Azt mondjuk, hogy ezek a ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, ha létezik olyan E szám, melyre teljesül, hogy az $\frac{S_n}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak az E számhoz, azaz ahhoz a valószínűségi változóhoz, mely egy valószínűséggel az E konstanssal egyenlő.*

Tétel a nagy számok gyenge törvényéről. *Legyen ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyekre teljesül az $E\xi_1^2 < \infty$ tulajdonság. Ezek a valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét az $E = E\xi_1$ konstanssal.*

Bizonyítás: Láttuk, hogy az adott feltételek mellett

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j - E\xi_1 \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{\text{Var } \xi_1}{n\varepsilon^2}$$

minden $\varepsilon > 0$ számra. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \xi_1}{n\varepsilon^2} = 0$, innen következik a Tétel állítása.

Megjegyzés 1. A gyenge jelző a nagy számok gyenge törvényében arra utal, hogy a nagy számok gyenge törvényében független valószínűségi változók átlagainak konvergenciáját egy viszonylag gyenge konvergenciafogalom szerint, a sztochasztikus konvergencia szerint követeljük meg. A valószínűségszámításban foglalkoznak a nagy számok erős törvényével is, melyben ezen átlagok konvergenciáját egy erősebb konvergenciafogalom szerint, az úgynevezett egy valószínűséggel való konvergencia szerint követelik meg. Láttuk, hogy a nagy számok gyenge törvénye érvényes akkor, ha a tekintett független valószínűségi változók négyzetének létezik várható értéke. Felmerülhet az a kérdés, hogy ez a feltétel elhagyható-e vagy ha nem hagyható el, akkor lehet-e azt gyengíteni. Ugyancsak természetes probléma annak vizsgálata, hogy a $P \left(\left| \frac{S_n}{n} - E \right| > \varepsilon \right)$ valószínűségek milyen gyorsan tartanak nullához. Ezeknek a kérdéseknek a tárgyalásához később még visszatérünk.

Megjegyzés 2. Bár nem hangsúlyoztuk, de hallgatólagosan felhasználtuk azt a tényt, hogy amennyiben egy ξ valószínűségi változó négyzetének létezik várható értéke, akkor létezik a ξ valószínűségi változó várható értéke is. Valóban, ez következik az úgynevezett Cauchy–Schwarz egyenlőtlenségből, mely szerint $(E|\xi|)^2 \leq E\xi^2$. Ez az egyenlőtlenség kiolvasható a szórásnégyzet figyelmesebb vizsgálatából, mely szerint $E\xi^2 - (E|\xi|)^2 = \text{Var } |\xi| > 0$. Egy másik, talán egyszerűbb érvelés: Jelölje $F(\cdot)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor, mivel $|x| \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, ezért $E|\xi| = \int |x|F(dx) \leq \int \frac{1}{2}(x^2 + 1)F(dx) = \frac{1}{2}(E\xi^2 + 1) < \infty$, ha $E\xi^2 < \infty$.

A nagy számok (gyenge) törvényének szemléletes tartalma az, hogy ha sok egymástól független egyforma eloszlású kísérlet történik, akkor ezek átlaga „regularizálódik”, konstans lesz. Ez magyarázza meg például azt a tényt, hogy minden évben közel ugyanannyi fiú és lány születik.

Független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvénye. Sűrűségfüggvények konvolúciója.

A következő kérdéssel foglalkozunk. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, melyeknek létezik $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye. Lássuk be, hogy a $\xi + \eta$ összegnek is létezik $h(\cdot)$ sűrűségfüggvénye, és adjuk meg azt a formulát, melynek segítségével azt kiszámölhatjuk. E vizsgálat során be fogjuk vezetni két (sűrűség)függvény konvolúciójának a fogalmát. Ezután alkalmazzuk ezt az eredményt néhány konkrét esetben.

Jelölje $H(x) = P(\xi + \eta < x)$ a független $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvényű ξ és η valószínűségi változók $\xi + \eta$ összeg eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$\begin{aligned} H(x) &= P(\xi + \eta < x) = \int \int_{\{(u,v): u+v < x\}} f(u)g(v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{u})g(\bar{v} - \bar{u}) d\bar{u} \right] d\bar{v} = \int_{-\infty}^x K(v) dv, \end{aligned}$$

ahol

$$K(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v - u) du.$$

A fenti számolásokban egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar{v} = u + v$, $\bar{u} = u$ helyettesítéssel. Felhasználtuk, hogy e transzformáció során az $\{(u, v): u + v < x\}$ tartomány a $\{(\bar{u}, \bar{v}): \bar{v} < x, -\infty < \bar{u} < \infty\}$ tartományba megy át, és a fenti (lineáris) transzformáció Jakobiánja azonosan 1.

Ezután bevezetjük a következő definíciót.

(Sűrűség)függvények konvolúciójának a definíciója. Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két sűrűségfüggvény a számegyenesen, általánosabban integrálható függvények, azaz tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du < \infty$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du < \infty$. Az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ függvények $f * g(\cdot)$ konvolúciója az

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u) du, \quad -\infty < x < \infty,$$

függvény.

Megjegyzés: Egyszerű (lineáris) transzformációval kapjuk, hogy a konvolúciót másképp is kiszámolhatjuk. Ez mutatja, hogy a konvolúcióban résztvevő függvények szimmetrikus szerepet játszanak.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)g(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2} - u\right)g\left(\frac{x}{2} + u\right) du, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Az előbb elvégzett számolásokból következik a következő eredmény.

Tétel független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényéről. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\xi + \eta$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u) du, \quad -\infty < x < \infty$$

függvény.

Megjegyzés: Felmerülhet a kérdés, hogy amennyiben $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ integrálható függvény, de nem teszünk fel semmilyen további tulajdonságot ezekről a függvényekről, akkor szükségszerűen létezik-e az $f * g(\cdot)$ konvolúció? Rögzített x számra az $f * g(x)$ számot definiáló integrál nem feltétlenül létezik. Viszont a mértékelméletben belátják, hogy az olyan kivételes pontok, melyekre ez az integrál nem létezik kevesen vannak, és a számegyenes majdnem minden pontjában a konvolúciót definiáló integrál létezik. Azokban a konkrét esetekben, melyekkel találkozni fogunk ez a probléma nem merül fel. Ezért azzal a kérdéssel nem foglalkozunk, csak megemlíjtjük a bizonyítás részleteinek vizsgálata nélkül, hogy az általános eset vizsgálata a következő észrevételen alapul. Belátják, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| * |g|(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)||g(u)| du dv,$$

és az általános eredmény ebből az azonosságból és az integrálok alapvető tulajdonságai-
ból következik.

Ezután lássunk néhány példát a fenti eredmény alkalmazására.

Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x) = \int f(y)f(x-y) dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye.

Ezért $f(y)f(x-y) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2} \leq x-y \leq \frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2} + x \leq y \leq \frac{1}{2} + x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi + \eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye

az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum hosszával.

Ha $|x| > 1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x) = 0$. Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1 - x$, azaz ebben

az esetben $g(x) = 1 - x$. Ha $-1 \leq x \leq 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum melynek hossza $1 + x = 1 - |x|$, azaz $g(x) = 1 + x = 1 - |x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \leq 1$, és $g(x) = 0$, ha $|x| > 1$.

Megadunk egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást is, amelyik a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Defináljuk a $K = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető részhalmazára

igaz az, hogy $P((\xi, \eta) \in A) = \lambda(A \cap K)$. Speciálisan, $G(x) = P(\xi + \eta < x) = \lambda(K \cap \{(u, v) : u + v < x\})$. Ha $x \leq -1$, akkor $G(x) = 0$, ha $-1 \leq x \leq 0$, akkor $G(x)$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x)$ és $(\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{2})$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac{1}{2}(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x \geq 1$, akkor $G(x) = 1$. Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, melyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + x)$ és $(-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2})$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x) = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x) = 0$, ha $|x| \leq 1$, $g(x) = 1 + x$, ha $-1 \leq x \leq 0$, és $g(x) = 1 - x$, ha $0 \leq x \leq 1$.

Tekintsünk két a második előadáson tárgyalt feladatot, melyet annak idején geometriai megfontolások alapján oldottunk meg. Megmutatjuk, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolúció segítségével is.

- a.) Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?
- b.) Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Az a) feladat megoldása. Jelölje ξ_j , $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j -ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2} \leq \xi_1 - \xi_2 \leq \frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Mivel $\xi_1 - \xi_2 = \xi_1 + (-\xi_2) = \xi_1 + \bar{\xi}_2$ -t is írhatunk, ahol $\bar{\xi}_2 = -\xi_2$, és $\bar{\xi}_2$ sűrűségfüggvényét könnyen kiszámolhatjuk, ezért a konvolúcióról tanultak alapján ezt a feladatot meg utdjuk oldani. Az $F(u) = P(\xi_1 - \xi_2 < u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u) = f_1 * f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u) = 1$, ha $0 \leq u \leq 1$, $f_1(u) = 0$, különben, $f_2(u) = 1$, ha $-1 \leq u \leq 0$, $f_2(u) = 0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} g(u) du$ integrál. Továbbá,

$$g(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x-u) du, \quad -\infty < x < \infty,$$

ahol $f(u) = 1$, ha $\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$, $f(u) = 0$, ha $u \geq \frac{1}{2}$.

Az előző feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u) = 1 - u$, ha $0 < u < 1$ $g(u) = 1 + u$, ha $-1 < u < 0$. Innen $F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - |u|) du = \frac{3}{4}$.

A b.) feladat megoldása. Jelölje ξ_j , $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy a j -ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1 , és ξ_2 független valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, melyre $f(x) = 2$, ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Minket a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x) = f * f(x)$, ahonnan $g(x) = 2 - |2 - 4x|$, ha $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, melyet a a következő képletek adnak meg: $F(u) = 0$, ha $u \leq 0$,

$F(u) = 1 - 2u^2$, ha $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, $F(u) = 1 - 2(1 - u)^2 = 4u - 2u^2 - 1$, ha $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$.
Ha $u \geq 1$, akkor $F(u) = 1$.

Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

Általánosabban, legyenek ξ_1, \dots, ξ_m független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1 + \dots + \xi_m$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Ki kell számolnunk az $f * f(x)$ illetve $\underbrace{f * \dots * f(x)}_{m\text{-szer}}$ konvolúciókat a fenti

$f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$, a konvolúciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x - y)$ integrandus nulla, ha $y \leq 0$ vagy $x - y \leq 0$. Innen a konvolúciót definiáló integrál csak $x \geq 0$ esetén lehet nulla, az $x \leq 0$ esetben $f(y)f(x - y) > 0$ minden y -ra nulla, és $x \geq 0$ esetén az $f(y)f(x - y) > 0$ integrandus csak $0 \leq y \leq x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x) = f * f(x)$ $x < 0$ -ra $f_2(x) = 0$, és

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x - y) dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy \\ &= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x} dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x \geq 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan, ha $f_m(x) = \underbrace{f * \dots * f(x)}_{m\text{-szer}}$ jelöli $\xi_1 + \dots + \xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor

$f_m(x) = 0$ minden $m \geq 1$ számra, ha $x < 0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1} * f(x) = f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$\begin{aligned} f_{m-1} * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x - y) dy = \int_0^x \lambda^{m-1} \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)} dy \\ &= \lambda^m e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} dy = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x \geq 0. \end{aligned}$$

Másrészt $f_m(x) = 0$, ha $x \leq 0$.

Megjegyzés: Láttuk, hogy ha az $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $f(x) = 0$, ha $|x| \leq \frac{1}{2}$ függvénynek, azaz az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényének a konvolúcióját tekintjük önmagával, akkor a konvolúció az $f * f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \leq 1$, és $f * f(x) = 0$, ha $|x| \geq 1$. Ez azt jelenti, hogy ebben a példában az eredeti sűrűségfüggvény két pontban, az $x = \pm \frac{1}{2}$ pontban nem folytonos, viszont ennek konvolúciója önmagával már mindenütt folytonos. Hasonlóan egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ sűrűségfüggvény. Ez a függvény nem folytonos az origóban, viszont ennek konvolúciója önmagával már mindenütt folytonos. Sőt, amennyiben e sűrűségfüggvény m -szeres konvolúcióját alkalmazzuk m alkalommal,

akkor az így kapott függvény még simább, $m - 1$ -szer differenciálható. Ezek a példák azt sugallják, hogy a konvolúció operátor folytonosabbá teszi a függvényeket. Ez az elképzelés helyes. Nem fogjuk ezt a kérdést részletesebben tárgyalni, de megfogalmazzunk a következő feladatban egy olyan állítást, mely ilyen jellegű eredményt mond ki.

Feladat:

Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két függvény, melyek k -szor illetve l -szer differenciálható, és ezek a differenciálhányadosok szintén integrálható függvények. Ekkor az $f * g(\cdot)$ konvolúció $k + l$ -szer differenciálható függvény.

Jegyezzük meg, hogy az előző feladatokban tekintett konvolúciót csak akkor használhatjuk, ha olyan valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét akarjuk kiszámolni, amelyek függetlenek. Ez az oka annak, hogy a következő feladat megoldásában nem használhatjuk a konvolúciót, hanem más módszert kell alkalmaznunk.

Feladat:

Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \geq 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \leq 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a $G(x) = P(\{\omega: \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\})$ eloszlásfüggvényt kell kiszámolni az $F(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében. Viszont, ha ismerjük egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor az meghatározza a $P(\omega: \xi(\omega) \in B)$ halmazok valószínűségét minden „szép”, azaz Borel mérhető B halmazra. Vegyük észre, hogy jelen feladatban is ilyen jellegű problémát kell megoldani. Az ebben a feladatban megjelenő B halmaz egyszerű szerkezetű, és ezért ez a feladat könnyebben megoldható. Tekintsük az $A(\omega, x) = \{\omega: \xi(\omega) + \xi(\omega)^2 < x\}$ halmazokat. Ezek valószínűségét kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük az $B(x) = \{y: y + y^2 < x\}$ halmazt. Vegyük észre, hogy $B(x) = \{y: y_1(x) < y < y_2(x)\}$, ahol $y_1(x) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}$ és $y_2(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$ az $y^2 + y = x$ egyenlet kisebb és nagyobb megoldása, és $A(\omega, x) = \{\omega: y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}$. Innen $G(x) = P(\{\omega: y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}) = F(y_2(x)) - F(y_1(x))$. Ezért a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P(y_1(x) < \xi < y_2(x)) = P(\xi < y_2(x)) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}\right\}$, ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x \leq 0$ függvény. A $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, azaz $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x}} \exp\left\{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}\right\}$, ha $x \geq 0$.