

A február 12-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

- 1.) Reggel valaki hazuról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2 , hogy a nadrág és A_3 , hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem vészett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1 , A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$ továbbá $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$ és $P(B|A_3) = 1$. Vezessük be a $C = (\bar{B} \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_2) \cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C) = P(A_1 \cap \bar{B}) + P(A_2 \cap \bar{B}) + P(A_3) = P(\bar{B}|A_1)P(A_1) + P(\bar{B}|A_2)P(A_2) + P(A_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.31$, és $P(B \cap C) = P(B \cap A_3) = P(A_3) = 0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\frac{0.2}{0.31} = \frac{20}{31}$.

- 2.) A Fazekas könyv egyik feladata (3.4 Példa a 32. oldalon) arról szól, hogy ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír. Heurisztikusan úgy érvelhetünk, hogy ha a legjobb diák dolgozatot ír, akkor annak (feltételes) valószínűsége, hogy a legrosszabb diák is dolgozatot ír, azzal egyenlő, hogy a maradék $n - 1$ diák közül őt is kiválasztják a maradék $r - 1$ dolgozatíró közé, tehát $\frac{r - 1}{n - 1}$. Kissé pontosabban, annak valószínűsége, hogy mind a ketten dolgozatot írnak, $\frac{r(r - 1)}{n(n - 1)}$, annak, hogy a legjobb diák dolgozatot ír $\frac{r}{n}$, ahonnan következik az állítás. Ha a könyvben szereplő eredményt egyszerűbb alakra hozzuk, látjuk hogy az eredmény helyes. Adjunk közvetlen, a szemléletet követő precíz bizonyítást arra, hogy a fenti formulák az adott valószínűségekre helyesek.

Megoldás: Az urna visszatevés nélküli húzás modelljének érvelését alkalmazhatjuk ebben az esetben is. Tegyük fel, hogy egymás után kiválasztjuk a dolgozatot írókat, Minden lépésben az eddig ki nem választottak valamelyikét választjuk ki egforma valószínűséggel. Ha kijelöljük (az urnából való húzásnál szereplő érvelést használva) egy külön (egy elemű) csoportba a legjobb, egy külön (egy elemű) csoportba a legrosszabb diákot, egy külön csoportba az összes többit, akkor rögzítve

egy $1 \leq j, k \leq r$, $j \neq k$ számpárt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a j -ik választásnál választunk az első, a k -ik választáskor a második csoportból, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első választáskor választunk az első és a második választáskor a második csoportból. Ennek valószínűsége viszont $\frac{1}{n(n-1)}$. Mivel a fenti események különböző (j, k) számpárokra kizárják egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a legjobb és alegrosszabb diák is dolgozatot ír $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$. Hasonlóan, látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a legjobb diák dolgozatot ír az $\frac{r}{n}$ számmal egyenlő.

- 3.) Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőt) p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy helyes választ adott?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a helyes választ, B azt az eseményt, hogy helyes választ ad. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kíváncsiak. Ekkor $P(A) = P(A \cap B) = p$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + \frac{1}{3}P(\bar{A}) = p + \frac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B) = \frac{p}{p + \frac{1}{3}(1-p)}$.

Házi feladat:

A zsebünkben van 30 kulcs, melyek közül az egyik nyit egy zárat. Egymás után kipróbáljuk véletlenszerűen kipróbálva ezeket a kulcsokat. Mi a valószínűsége annak, hogy a 20. kísérletre sikerül kinyitni a zárat? Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. kísérletben sikerül kinyitni a zárat feltéve, hogy az első 19 kísérletben ez nem sikerült?

- 4.) Feldobunk egy dobókockát, majd utána annyi dobókockát, amennyi az első dobás eredménye volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a második dobássorozatban lesz hatos? Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy az első dobás eredménye hatos, feltéve hogy a második dobássorozatban volt hatos?

Megoldás: Tekintsünk azokat az eseményeket, melyek leírják a lehetséges dobássorozatok eredményét, és adjuk meg ezek valószínűségét. Annak valószínűsége, hogy az első dobás eredménye i , majd ezt követően egy i hosszúságú 1 és 6 közötti számokat tartalmazó dobássorozatot kapunk $\left(\frac{1}{6}\right)^{i+1}$. Annak valószínűsége, hogy

az első dobás eredménye i , és az utolsó i dobás egyike sem hatos, $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^i$. Annak valószínűsége, hogy a második dobássorozatban van hatos

$$\frac{1}{6} \left(\left(1 - \frac{5}{6}\right) + \cdots + \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6\right) \right).$$

Annak valószínűsége, hogy az első dobás hatos, utána pedig van hatos dobás $\frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{5}{6} \right)^6 \right)$. Ezért a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^6}{\left(1 - \left(\frac{5}{6} \right) \right) + \dots + \left(1 - \left(\frac{5}{6} \right)^6 \right)}.$$

- 5.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik összekeverik. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jelölje A_1 , A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $P(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2}. \end{aligned}$$

- 6.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

A következő (egyszerű) feladat célja az, hogy összehasonlítsuk annak eredményét az előbb tárgyalt feladattal, és megbeszéljük mást jelent az a feltételt, hogy két kockadobás

közül az egyik hatos, és az hogy adódott hatos dobás. Képesek vagyunk-e szemléletünk alapján számolás nélkül megmondani, melyik feltevés mellett nagyobb annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos?

- 7.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos, feltéve hogy az első dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, A_2 pedig azt az eseményt, hogy a második dobás hatos. Ekkor $A_1 \cap A_2$ az az esemény, hogy mind a két dobás hatos, és minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1)$ feltételes valószínűség értéke érdekel.

$$\text{Viszont, } P(A_1 \cap A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = \frac{1}{6}.$$

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk háromszor egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a három dobás fej, feltéve, hogy legalább két fejdobás történt?

A következő feladat állítását gyakran hívják teleszkóp szabálynak:

Házi feladat:

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1 | B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap B_n) \cdots P(B_{n-1} | B_n) P(B_n), \text{ ha } P(B_2 \cap \dots \cap B_n) > 0.$$

- 8.) Két különböző fáról leszednek 100 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen) ládába. Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik (véletlenül kiválasztott) ládából két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik ládáól egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Megoldás: A feladat részletesebben (pontosabban) úgy fogalmazható meg, hogy mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a második ládából már nem férges almát húznak, feltéve, hogy az a továbbiakban C -vel jelölt esemény következett be, hogy az első ládából való két húzásban férges almát húztunk.

Jelölje B azt az eseményt, hogy az elsőnek választott láda a rosszabb, azaz ez az $\frac{1}{4}$ valószínűséggel férges almákat tartalmazó láda, \bar{B} pedig jelölje a komplementer eseményt, azaz azt, hogy először az $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férges almákat tartalmazó

ládához nyúltunk. Ekkor feltevéseink szerint $P(B) = P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, és $P(C|B) = \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $P(C|\bar{B}) = \left(\frac{1}{10}\right)^2$. (Két egymástól független kísérlett végeztünk el, mind

a két kísérlet esetén a bekövetkezett eredmény valószínűsége $\frac{1}{4}$, illetve $\frac{1}{10}$.

Számoljuk ki először a $P(B|C)$ feltételes valószínűséget, azaz annak feltételes valószínűségét, hogy először a rosszabb, azaz az $\frac{1}{4}$ valószínűséggel férges almákat tartalmazó ládához nyúltunk, feltéve, hogy a kihúzott két alma férges. E feltételes valószínűség kiszámítása érdekében számítsuk ki előbb a $P(B \cap C)$ és $P(B)$ valószínűségeket. Felírhatjuk, hogy

$$P(B \cap C) = P(B|C)P(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2, \quad P(\bar{B} \cap C) = P(C|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

ahonnan

$$P(C) = P(B \cap C) + P(\bar{B} \cap C) = \frac{1}{32} + \frac{1}{200} = \frac{29}{800},$$

és

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{25}{29}.$$

Jelölje, D azt az eseményt, hogy az utolsó húzáskor nem férges almát húzunk. Ekkor feltevéseink szerint $P(D|B) = \frac{9}{10}$, és $P(D|\bar{B}) = \frac{3}{4}$, sőt azt is tudjuk, hogy $P(D|B \cap C) = \frac{9}{10}$, és $P(D|\bar{B} \cap C) = \frac{3}{4}$, mert a feltételes valószínűség csak attól függ, hogy melyik ládához nyúltunk, de annak nincs jelentősége, hogy milyen kísérletsorozat után választottuk azt ki. Minket a $P(D|C)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$\begin{aligned} P(D|C) &= P(D \cap B|C) + P(D \cap \bar{B}|C) \\ &= P(D|B \cap C)P(B|C) + P(D|\bar{B} \cap C)P(\bar{B}|C) \\ &= \frac{9}{10}P(B|C) + \frac{3}{4}(1 - P(B|C)) = \frac{9}{10} \frac{25}{29} + \frac{3}{4} \frac{4}{29} = \frac{255}{290} \end{aligned}$$