A február 19-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1. Legyenek $A_1, A_2, \dots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \dots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

   Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, melyre igaz, hogy minden $k \ge n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.

2. Ha egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk egymás után, akkor egy valószínűséggel lesz legalább 50 fejdobás.

   Egy lehetséges megoldás: Az is igaz egy valószínűséggel, hogy a

   $$B_k = \{\text{azon } j \text{ indexekre, melyekre } 50k \le j < 50(k+1) \text{ minden dobás fej}\}$$

   események közül végtelen sok fog bekövetkezni. Ugyanis ezek a B_k események függetlenek, $P(B_k) = 2^{-50}$, tehát $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \infty$. Ezért a Borel–Cantelli lemmából következik a kívánt állítás, sőt az is, hogy végtelen sok B_k esemény következik be egy valószínűséggel. Valójában a Borel–Cantelli lemmára nincs is szükség. Annak valószínűsége, hogy egyik B_k esemény sem következik be $\lim\limits_{N\to\infty} \left(1 - 2^{-50}\right)^N = 0$, tehát egy valószínűséggel valamelyik B_k esemény bekövetkezik.

   Hogyan lehet egyszerűen látni a Borel–Cantelli lemma nélkül, hogy végtelen sok B_k esemény bekövetkezik egy valószínűséggel? *Segítség:* Elég belátni, hogy bármilyen L számra egy valószínűséggel legalább L B_k esemény bekövetkezik. Viszont az előző érveléshez hasonlóan, annak valószínűsége, hogy van egy legalább $50L$ hosszú tiszta fejdobás sorozat egy valószínűséggel. (Jegyezzük meg, hogy ebben az érvelésben kihasználtuk, hogy megszámlálható sok egy valószínűségű halmaz metszete is egy valószínűségű.

3. Egy kaszinóban azt játsszák, hogy egymás után feldobnak egy szabályos pénzdarabot, és akinek a kaszinóban való tartozkódása alatt csupa fej-dobás történt, az nyer, akinek ott tartozkódása alatt történt írás dobás is az veszít. Végtelen sok ember egymást felváltva betér a kaszinóba, és ott megfigyel A_n pénzdobást. Lássuk be, hogy amennyiben $A_n = [\log n]$, ahol log kettes alapú logaritmust jelöl, $[x]$ pedig a legnagyobb x-nél kisebb egész szám, akkor egy valószínűséggel végtelen sok ember távozik nyertesen. Ha $A_n = \left[\frac{101}{100} \log n\right]$, akkor egy valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen. Mi a helyzet, ha $A_n = [\log n + \log\log n]$, és ha $A_n = \left[\log n + \frac{101}{100} \log\log n\right]$?

Megoldás: Az egyes emberek egymástól függetlenül távoznak nyertesen vagy vesztesen a kaszinóból, és annak valószínűsége, hogy az n-ik ember nyertesen távozik 2^{-A_n}. A Borel–Cantelli lemma miatt egy valószínűséggel távozik végtelen sok ember nyertesen, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} = \infty$, és egy valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} < \infty$. Ha $A_n = [\log n]$, akkor $\frac{1}{n} \le 2^{-A_n} \le \frac{2}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} = \infty$. Hasonlóan $A_n = \left[\frac{101}{100} \log n\right]$ esetében $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} < \infty$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{101/100}} < \infty$ reláció miatt. Végül $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} = \infty$, ha $A_n = [\log n + \log\log n]$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} < \infty$, ha $A_n = \left[\log n + \frac{101}{100} \log\log n\right]$, a $\sum\limits_{n} \frac{1}{n \log n} = \infty$, és $\sum\limits_{n} \frac{1}{n(\log n)^{101/100}} < \infty$ relációk miatt.

4. Lássunk példát arra, hogy a Borel–Cantelli lemma azon felében, amikor teljesül a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ reláció, a függetlenség feltétele nem hagyható el. Mutassunk példát $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre, azon $A_1, A_2, \dots,$ eseményekre, melyekre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, és

   a) Annak valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be $\frac{1}{2}$.

   b) Annak valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be 0.

   Megoldás: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ az $\Omega = [0,1]$ intervallum, azon $\mathcal{A}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája, és P a Lebesgue mérték. Az a) esetre példa az, ha $A_n = [0, \frac{1}{2}]$ minden n-re. Ekkor végtelen sok A_n következik be egy $x \in \Omega$ pontban akkor és csak akkor, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$. A b) esetre példa, ha $A_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor ugyanis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, és minden $x \in \Omega$ pontra csak véges sok olyan n index van, melyre $x \in A_n$. Ugyanis minden $x > 0$ számhoz létezik olyan n_0, index, melyre $x > \frac{1}{n}$, ha $n \ge n_0$, és $x \notin A_n$, ha $n \ge n_0$.

5. Ha $A_1, \dots, A_n$ független események, és bevezetjük az $A_j^1 = A_j$ és $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ jelöléseket, akkor tetszőleges $\varepsilon_j = \pm$, $1 \le j \le n$ sorozatra az $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ események függetlenek.

   Megoldás: Elég belátni, hogy egy A_j halmaz kicserélése az A_j^{-1} halmazra nem változtatja meg a halmazrendszer függetlenségét. Továbbá az indexek szimmetria tulajdonsága miatt elég a $j = 1$ esettel foglalkozni. Ezután a függetlenséget definiáló relációk közül elég azokat ellenőrizni, amelyekben az 1 index szerepel. Azt kell megmutatni. hogy az $A_1, \dots, A_n$ események függetlensége esetén teljesül az

$$P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) = P(\Omega \setminus A_1) P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s})$$

azonosság minden $2 \le l_1 < \cdots < l_s$ indexre. Viszont ekkor

$$\begin{aligned}
P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) &= P(A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) - P(A_1 \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) \\
&= P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) - P(A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\
&= (1 - P(A_1))P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\
&= P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}).
\end{aligned}$$

6. Legyenek $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ események függetlenek egymástól. Lássuk be, hogy tetszőleges olyan C eseményre, amelyik előállítható az $A_1, \dots, A_k$ halmazokból metszet, unió és komplementerképzés segítségével igaz, hogy a $B_1, \dots, B_m$ és C halmazok függetlenek.

   Segítség: Lássuk be, hogy minden ilyen C helmaz felírható az előzű feladat jelölését használva $C = \bigcup\limits_{(j_1,\dots,j_n)\in J} A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ alakban, ahol J egy n hosszúságú ± 1 sorozatokból álló halmaz. Továbbá az ebben a kifejezésben szereplő $A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ események diszjunktak, és függetlenek a $B_1, \dots, B_n$ eseményektől.

   Javaslat: Beszéljék meg e feladat kapcsán a konjunktiv és diszjunktiv normálforma jelentését és hasznát.

7. Adjunk példát egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, melyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.

   Egy lehetséges konstrukció: Legyen $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$, $P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ és $A_3 = \{1,4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x+y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x+y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$, továbbá $P(\{5\}) = \frac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyílván $P(A_1 \cap A_2) \ne P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

6′. Adjunk példát minden $N > 2$ szám esetén egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon N $A_1, \dots, A_N$, eseményre, melyekre

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_N),$$

   de az A_1, A_2, ..., A_N események nem függetlenek.

   Az előző konstrukció módosítása: Legyen $\Omega = \{1, 2, \dots, N+2\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{j\}) = y$, ha $2 \le j \le N+1$, $P(\{N+2\}) = 1 - x - Ny$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden

$A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_j = \{1, j+1\}$, $1 \le j \le N$, halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = x$. Másrészt $P(A_j) = x + y$, $1 \le j \le N$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x+y)^N$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{N}$, és ekkor $x = (x+y)^N = \frac{1}{N}$, $y = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^N}$, továbbá $P(\{N+2\}) = 1 - x - Ny = \frac{N-1}{N^N}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_N)$. Viszont az $A_1, \dots A_N$, események nem függetlenek.

8. Lássunk példát arra is, hogy események páronkénti függetlenségéből nem következik azok függetlensége, azaz definiálunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, azon három A_1, A_2, A_3-mal jelölt eseményt, melyek páronként függetlenek, azaz $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, de nem teljesül a $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosság, tehát ezek az események nem függetlenek.

   Megoldás: Álljon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben Ω 4 pontból, a jobb szemlélhetőség kedvéért legyenek ezek az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ pontok, álljon $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazából, és legyen $P(\{(1,1)\}) = P(\{(1,2)\}) = P(\{(2,1)\}) = P(\{(2,2)\}) = \frac{1}{4}$. Tekintsük az $A_1 = \{(1,1),(1,2)\}$ $A_2 = \{(1,1),(2,1)\}$ és $A_3 = \{(1,1),(2,2)\}$ halmazokat. Ekkor teljesülnek a $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ azonosságok, mert $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, és mivel $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \{(1,1)\}$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. Másrészt, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \ne P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, mert $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}$, és $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$.

9. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk $n \ge 5$ alkalommal. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 5 fejdobás történik? Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos pénzdarab végtelen sok dobása során legfeljebb 5 fejdobás történik? Tekintsük ennek az utóbbi feladatnak egy valószínűségi modelljét és beszéljük meg a következő két tulajdonság kapcsolatát:

   a. Egy A esemény nem következhet be.

   b. Egy A esemény nulla valószínűséggel következik be.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy szabályos pénzdarab n egymástól független dobása során pontosan j darab fejdobás történik $\binom{n}{j} 2^{-n}$, mert összesen $\binom{n}{j}$ ilyen dobássorozat van, és mindegyik dobássorozat valószínűsége 2^{-n}. Így annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 fejdobás történik $\sum_{j=0}^{5} \binom{n}{j} 2^{-n}$. Annak a valószínűsége, hogy végtelen dobássorozat esetén legfeljebb 5 fejdobás történik $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{5} \binom{n}{j} 2^{-n} = 0$. Miért szabad határértéket venni? Megbeszélendő, hogy felhasználtuk a valószínűségi mérték folytonossági tulajdonságát, mely a valószínűség σ-additivitásából következik.

10. Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j) = \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega \setminus A_j) = 1 - \frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega \setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)\right) = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{100} = \left(\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10} \sim e^{-1/10}$. Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

11. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j = \{m \colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1 \le j \le k$. Legyen $B = \{m \colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek.

b. $P(B) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j} p_j\right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy

$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, $\ldots$ A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.