A február 26-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

Láttuk, hogyan lehet egyszerűen kiszámítani a $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ alakú események valószínűségét, ha az A_j, $1 \le j \le n$, események függetlenek. Ezek a számolások természetesen kihasználták a tekintett események függetlenségét. A következőben azt tárgyaljuk meg, hogy amennyiben nincs feltétlenül függetlenség a tekintett események között, de ki tudjuk számolni az $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ alakú események valószínűségét, akkor egy úgynevezett szita formula segítségével ki tudjuk számítani az $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ események valószínűségét is. Továbbá megmutatjuk, hogy ez lehetővé teszi érdekes feladatok megoldását. A következő feladatot fogjuk tárgyalni:

1. Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Mi a valószínűsége annak, hogy egyetlen házaspár sem táncol együtt? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke, ha $n \to \infty$?

   Megoldás: Definiáljuk a következő A_j eseményeket:

   $$A_j = \text{a } j\text{-ik házaspár egütt táncol}, \quad 1 \le j \le n.$$

   Ekkor minket a $P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűség érdekel. Vegyük észre, hogy a $P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$ azonosság igaz. Ugyanis az összes lehetséges párbaállítások száma $n!$, míg az olyan párbaállítások száma, melyben a j_1-ik, j_2-ik, ... , j_k-ik házaspár egy párba kerül $(n-k)!$. Továbbá érvényes a következő az irodalomban szita-formulának nevezett eredmény, melyet külön fogunk tárgyalni.

Szita formula. *Legyenek $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

A szita-formula segítségével kapjuk, hogy n házaspár esetében

$$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Innen adódik, hogy a minket érdeklő valószínűség n házaspár esetén

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \end{aligned}$$

és ezért

$$P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e} \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

2. Bizonyítsuk be a szita formulát.

Megoldás: Adva egy A esemény vezessük be az A^ε jelölést, ahol $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon = 1$ estében $A^1 = A$, $\varepsilon = -1$ esetében $A^{-1} = \Omega \setminus A = \bar{A}$. Definiáljuk tetszőleges $r_s = 1$ vagy $r_s = -1$, $s = 1, \dots, n$ számokra az

$$A(r_1, \dots, r_n) = A^{r_1} \cap \cdots \cap A^{r_n}$$

eseményeket. Vegyük észre, hogy

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ (r_1,\dots,r_n) \neq (-1,\dots,-1)} A(r_1, \dots, r_n),$$

és tetszőleges $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le n$ alakú halmazra

$$A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s} = \bigcup_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ r_{j_u}=1,\ 1 \le u \le s} A(r_1, \dots, r_n).$$

Továbbá az $A(r_1, \dots, r_n)$ események különböző $(r_1, \dots, r_n)$ paraméterek esetében diszjunktak. Ezért

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ (r_1,\dots,r_n) \neq (-1,\dots,-1)} P(A(r_1, \dots, r_n)),$$

és tetszőleges $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ alakú halmazra

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}) = \sum_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ r_{j_u}=1,\ 1 \le u \le s} P(A(r_1, \dots, r_n)).$$

Ilyen módon a az $A(r_1, \dots, r_n)$ halmazok $P(A(r_1, \dots, r_n))$ valószínűségeinek a lineáris kombinációjaként fejezhető ki a szita-formula két oldalán szereplő kifejezés. Azt kell belátni, hogy a $P(A(r_1, \dots, r_n))$ szám a szitaformula két oldalán szereplő kifejezésben ugyanazzal az együtthatóval szerepel. Az azonosság baloldalán ez az együttható 1, ha $\{r_1, \dots, r_n\} \neq \{-1, \dots, -1\}$, és nulla, ha $\{r_1, \dots, r_n\} = \{-1, \dots, -1\}$. Ha az $(r_1, \dots, r_s)$ halmaz l darab 1 és $n-l$ darab -1 jegyet tartalmaz, akkor ennek valószínűsége a szitaformula jobboldalán ezt $\binom{l}{1} - \binom{l}{2} + \cdots \pm \binom{l}{l} = \sum\limits_{k=1}^{l} (-1)^{k+1} \binom{l}{k}$ együtthatóval szerepel. Ugyanis az S_k összegben ez a kifejezés $\binom{l}{k}$ együtthatóval szerepel. Miért?

Innen a vizsgált együttható $\sum\limits_{k=1}^{l}(-1)^{k+1}\binom{l}{k} = 1-\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k} = 1-(1-1)^k = 1$, ha az $A(r_1,\dots,r_n)$ halmaz $r_1,\dots,r_n$ indexei között $l \neq 0$ 1-es van. A maradék esetben pedig az együttható nulla. Ez azt jelenti, hogy a szita formula két oldal]án szereplő együthatók megegyeznek.

Tanulságos lehet a szita formula egy másik, egyszerűbb bizonyítását is megérteni, melynek módszere más esetekben is alkalmazható. Ennek fő lépése a következő önmagában is érdekes állítás bizonyítása:

Legyenek $c_1,\dots,c_n$ tetszőleges valós számok, és tekintsünk ezek illetve valamely $A_1,\dots,A_k$ eseményekből kifejezett események valószínínűségeinek lineáris függvényeit, azaz legyen $f_j(A_1,\dots,A_k)$, $1\le j\le n$, valamely, az $A_1,\dots,A_k$ eseményekből unióval, metszettel, és komplementerképzéssel kifejezett esemény. A

$$\sum_{j=1}^{n} c_j P(f_j(A_1,\dots,A_k)) \ge 0 \tag{$*$}$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor érvényes tetszőleges $A_1,\dots,A_k$ eseményekre, ha speciálisan érvényesek akkor, ha mindegyik A_j esemény, külön–külön vagy a biztos Ω vagy az üres $\emptyset$ halmaz valamelyikével egyenlő.

Ez azt jelenti, hogy a $(*)$ egyenlőtlenséget elég csak az említett speciális esetben ellenőrizni. Sőt, ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha a $(*)$ formulában a $\ge$ jelet a $=$ jellel helyettesítjük. Ehhez elég annyit észrevenni, hogy az azonosság azt jelenti, hogy a $(*)$ érvényes mind eredeti formájában, mind akkor, ha az összes c_j együtthatót a $-c_j$ együtthatóval helyettesítjük.

A formula bizonyítása a következő észrevételen alapul. Ha az összes $f_j(A_1,\dots,A_k)$, $1\le j\le n$, eseményt felírjuk konjunktív normálforma alakjában, és ennek segítségével kiszámoljuk valószínűségét, majd ezt beírjuk a $(*)$ formulába, akkor ezt a formulát átírhatjuk

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm1,\,1\le j\le k} d(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) P(A_1^{\varepsilon_1}\cap\cdot\cap A_k^{\varepsilon_k}) \ge 0 \tag{$**$}$$

alakban, ahol $A_j^1 = A_j$, $A_j^{-1} = \Omega\setminus A_j$, a $d(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ együtthatók explicit módon (bár sok esetben kissé bonyolultan) kiszámolhatóak. Viszont az állítás bizonyításához a $d(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ számok kiszámolására nincs szükség. Elég azt észrevenni, hogy a $(**)$ kifejezés akkor és csak akkor teljesül minden $A_1,\dots,A_k$ halmazra, ha az összes $d(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ együttható nem-negatív. Sőt, ha csak azokat a speciális eseteket tekintjük, amikor mindegyik A_j vagy $A_j=\Omega$ vagy $A_j=\emptyset$, akkor is elmondhatuk ezt. Ugyanis ebben a speciális esetben meg tudjuk választani az ε_j együútthatókat úgy, hogy egy előre rögzített $d(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)$ együttható eggyel az összes többi pedig nullával szorozva szerepel a $(**)$ formulában, és innen következik a kívánt állítás.

Ennek az állításnak a segítségével a szita formula egyszerűen igazolható. Valóban, ha az A_j események között k Ω és $n-k$ $\emptyset$ esemény van, akkor a baloldalon álló kifejezés 1, ha $k \geq 1$, és 0, ha $k = 0$. Másrészt S_j értéke $\binom{k}{j}$, ha $j \leq k$, és nulla, ha $k < j$. Ezért a jobboldalon álló kifejezés $\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = 1 - (1-1)^k$, ami megegyezik a baloldalon szereplő kifejezéssel.

Nem kötelező házi feladat:

Lássuk be a szitaformula jelöléseit használva, hogy

$$S_1 - S_2 = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} P(A_j \cap A_k) \leq P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq S_1 = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

és általában

$$\sum_{k=1}^{2l} (-1)^{k+1} S_k \leq P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{2l-1} (-1)^{k+1} S_k$$

minden l indexre. (Legyen $S_k = 0$, ha $k > n$.)

3. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_k$ független, diszkrét valószínűségi változók egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyek valamilyen $x_1, x_2, \ldots$ értékeket vesznek fel. Legyenek $A_1 \subset \{x_1, x_2, \ldots\}, A_2 \subset \{x_1, x_2, \ldots\}, \ldots, A_k \subset \{x_1, x_2, \ldots\}$ tetszőleges halmazok. Ekkor

$$P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \ldots, \xi_k \in A_k) = P(\xi_1 \in A_1) P(\xi_2 \in A_2) \cdots P(\xi_k \in A_k).$$

Továbbá mutassuk meg, hogy tetszőleges $\{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, k\}$ indexhalmazra a $\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_s}$ valószínűségi változók függetlenek.

Megoldás: A függetlenség miatt

$$\begin{aligned} &P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \ldots, \xi_k \in A_k) \\ &\quad = \sum_{x_1 \in A_1} \sum_{x_2 \in A_2} \cdots \sum_{x_k \in A_k} P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_k = x_k) \\ &\quad = \sum_{x_1 \in A_1} \sum_{x_2 \in A_2} \cdots \sum_{x_k \in A_k} P(\xi_1 = x_1) P(\xi_2 = x_2) \cdots P(\xi_k = x_k). \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} &P(\xi_1 \in A_1) P(\xi_2 \in A_2) \cdots P(\xi_k \in A_k) \\ &\quad = \sum_{x_1 \in A_1} P(\xi_1 = x_1) \sum_{x_2 \in A_2} P(\xi_2 = x_2) \cdots \sum_{x_k \in A_k} P(\xi_k = x_k). \end{aligned}$$

Elvégezve a beszorzásokat kapjuk a feladat első állítását.

A második állítást megkapjuk az első speciális eseteként $A_{j_u} = \{x_{j_u}\}$, $1 \le u \le s$ és $A_j = \{x_1, x_2, \dots\}$, $u \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}$ választással.

A következő feladat megfogalmazása előtt felidézzük az alábbi definiciót.

Halmaz indikátorfüggvényének a definiciója. *Legyen adva egy $A \in \mathcal{A}$ esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az A halmaz indikátorfüggvényén azt a $\chi_A(\omega)$ valószínűségi változót értjük, melyre $\chi_A(\omega) = 1$, ha $\omega \in A$, és $\chi_A(\omega) = 0$, ha $\omega \notin A$.*

4. Legyenek $A_1, \dots, A_k$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az $A_1, \dots, A_k$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha azok $\chi_{A_1}(\omega), \dots, \chi_{A_k}(\omega)$ indikátorfüggvényei függetlenek.

   Megoldás: Ha a $\chi_{A_1}(\omega), \dots, \chi_{A_k}(\omega)$ indikátorfüggvények függetlenek, akkor ezek tetszőleges részhalmaza is független az előző feladat eredménye szerint. Ezért minden $\{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, k\}$ indexhalmazra

$$\begin{aligned} P\left(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_s}\right) &= P\left(\chi_{A_{j_1}} = 1, \dots, \chi_{A_{j_s}} = 1\right) \\ &= P\left(\chi_{A_{j_1}} = 1\right) \cdots P\left(\chi_{A_{j_s}} = 1\right) = P\left(A_{j_1}\right) \cdots P\left(A_{j_s}\right). \end{aligned}$$

   Ha az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek, akkor egyes A_j eseményeket azok komplementerével helyettesítve ismét független eseményeket kapunk. Felírva az összes ilyen relációt, megkapjuk azokat az azonosságokat, melyek a $\chi_{A_1}(\omega), \dots, \chi_{A_k}(\omega)$ indikátorfüggvények függetlenségét jelentik.

5. Véletlenül meghívunk 30 embert. Tegyük fel, hogy az egyes embereknek egymástól függetlenül van születésnapjuk, és minden ember esetében $\frac{1}{365}$ annak a valószínűsége, hogy az év valamely napján született. Mi annak a valószínűsége, hogy van két ember a társaságban, akiknek ugyanaznap van a születésnapjuk?

   Általánosabban, van n urna, amelyekbe bedobunk egymástól függetlenül k golyót úgy, hogy mindegyik golyó egyforma valószínűséggel esik az egyes urnákba. Mi annak a valószínűsége, hogy van olyan urna melybe legalább két golyó esik? Érdekel minket továbbá ennek a valószínűségnek a viselkedése, ha mind az n mind a k szám nagy, és a $k = k(n)$ számnak megfelelő a nagyságrendje. Lássuk be, hogy a fenti valószínűségnek van határértéke, ha $n \to \infty$, $\frac{k}{\sqrt{n}} \to \alpha$ valamilyen $0 \le \alpha < \infty$ számmal, és határozzuk meg ezt a határértéket.

   Megoldás: Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, hogy a j-ik embernek az év hanyadik napján van a születésnapja. Ekkor a ξ_j, $1 \le j \le 30$, valószínűségi változók függetlenek, $P(\xi_j = l) = \frac{1}{365}$, $1 \le j \le 30$, $1 \le l \le 365$, és $P(\xi_j \neq \xi'_j$ ha $j \neq j')$ annak a valószínűsége, hogy mindenkinek különböző nap van a születésnapja. Ez a valószínűség viszont

$$\frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - 30 + 1)}{365^k} = \prod_{j=1}^{29} \left(1 - \frac{j}{365}\right),$$

mert annak valószínűlége, hogy az első ember születésnapja az l_1-ik, a másodiké az l_2-ik és így tovább a k-ik ember születésnapja az l_k-ik napon van $\frac{1}{365^k}$, tetszőleges $1 \le l_j \le 365$, $1 \le j \le 30$ számok esetén, és ezeket a számokat $\prod_{j=0}^{k-1}(365-j)$ módon választhatjuk úgy, hogy mindegyik l_j szám különböző legyen. Így annak a valószínűsége, hogy van két ember akinek ugyanazon a napon van a születésnapja $1-\prod_{j=1}^{29}\left(1-\frac{j}{365}\right)$.

Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy ha k golyót dobunk n urnába az adott módon, akkor van olyan urna, amelyikbe legalább két golyó esik $1-\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$.

Adjunk jó közelítést a $\log\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)=\sum_{j=1}^{k-1}\log\left(1-\frac{j}{n}\right)$ kifejezésre, ha $n\to\infty$, $\frac{k(n)}{\sqrt{n}}\to\alpha$. Heurisztikus érvelés szerint mivel $\log\left(1-\frac{j}{n}\right)\sim-\frac{j}{n}$ a $\log(1+x)$ függvény Taylor sorfejtése szerint, ezért $\sum_{j=1}^{k-1}\log\left(1-\frac{j}{n}\right)\sim-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{n}=-\frac{(k-1)k}{2n}$, ahonnan $\log\prod_{j=1}^{k(n)-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\to-\frac{\alpha^2}{2}$, ha $n\to\infty$, és $\frac{k(n)}{\sqrt{n}}\to\alpha$. Ez a számolás precizzé tehető, ha felhasználjuk például azt az egyenlőtlenséget, mely szerint

$$\left|\log\left(1-\frac{j}{n}\right)+\frac{j}{n}\right|\le\frac{2j^2}{n^2}\le\frac{\text{const.}}{n},\qquad\text{ha } n \text{ elég nagy és } \frac{j}{\sqrt{n}}\le\alpha+1,$$

ami szintén következik a $\log(1+x)$ Taylor sorfejtéséből. Miért? Innen kapjuk, hogy $1-\prod_{j=1}^{k(n)-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\to1-e^{-\alpha^2/2}$, ha $n\to\infty$, és $\frac{k(n)}{\sqrt{n}}\to\alpha$.

6. Egy urnában F fehér és P piros golyó van. Kihúzunk véletlenül egy golyót, majd visszadobunk R, $R\ge0$ ugyanolyan színű golyót az urnába. Minden húzás során a korábbiaktól függetlenül az urnában levő egyes golyókat egyforma valószínűséggel húzzuk ki. Lássuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik húzásban piros golyót húzunk megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzásban húzunk piros golyót. Annak valószínűsége, hogy a j-ik és k-ik húzásban húzunk piros golyót, $j\ne k$, megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és második húzásban húzok piros golyót.

   Megoldás: Vegyük észre, hogy egy olyan húzássorozatnak a valószínűsége, mely N piros és M fehér golyót tartalmaz csak az N és M számtól függ, nem függ a különböző színű golyók húzásának a sorrendjétől. Valóban, egy ilyen húzássorozat valószínűségét fel tudjuk írni. Ez

$$P(N,M)=\frac{P(P+R-1)\cdots(P+(N-1)(R-1))}{\prod\limits_{k=0}^{N+M-1}(P+P-k(R-1))}$$

$$\cdot F(F+R-1)\cdots(F+(M-1)(R-1))$$

(Miért?), és innen következik az állítás. Innen látható, hogy annak valószínűsége, hogy pontosan N piros és M fehér golyót húzunk és az első húzás eredménye piros megegyezik annak valószínűségével, hogy pontosan N piros és M fehér golyót húzunk és a j-ik húzás eredménye piros. Ugyanis mind a két valószínűség

$$\binom{N+M-1}{M}P(N,M).$$

Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy az első húzás piros megegyezik annak valószínűségével, hogy a j-ik húzás piros. Hasonlóan látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik és k-ik húzás piros megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és a második húzás eredménye piros. Ezután a keresett valószínűségeket könnyen kiszámíthatjuk. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás piros $\dfrac{P}{P+F}$, és $\dfrac{P(P+R-1)}{(F+P)(F+P+R-1)}$ annak a valószínűsége, hogy a j-ik és k-ik húzás piros, $j\neq k$,

Megjegyzés: A most vizsált modell $R=0$ esetén a visszatevés nélküli, $R=1$ esetén a visszatevéses urnamodellt adja mint speciális esetet.

7. Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

   Megoldás: Számoljuk ki annak valószínűséségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy elótte Z,Z és annak feltételes valószínűségét, hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z,Z,Z húzás volt. Ez a valószínűség, illetve feltételes valószínűségek $\dfrac{z}{z+s}$, $\dfrac{z}{z+s+2}$, $\dfrac{z}{z+s+4}$, $\dfrac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\dfrac{z}{z+s}\cdot\dfrac{z}{z+s+2}\cdot\dfrac{z}{z+s+4}\cdot\dfrac{s+6}{z+s+6}$.

8. Tekintsük az előző feladatban bevezetett urnamodellt. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy az első húzás eredménye zöld, és annak, hogy a második húzás eredménye zöld.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első húzás eredménye zöld $\dfrac{z}{z+s}$. Az az esemény, hogy a második húzás zöld úgy fordulhat elő hogy vagy egy zöld, zöld vagy egy sárga, zöld húzássorozat jelenik meg. A második keresett valószínűség ezen két húzássorozat valószínűségének az összege, tehát $\dfrac{z}{z+s}\cdot\dfrac{z}{z+s+2}+\dfrac{s}{z+s}\cdot\dfrac{z+2}{z+s+2}=\dfrac{z^2+s(z+2)}{(z+s)(z+s+2)}$.

Megjegyzés: Ebben a feladatban olyan urnamodellt tekintettünk, melyben eltér annak a valószínűsége, hogy az első húzásban illetve annak a valószínűsége, hogy a második húzásban húzunk zöld golyót.

9.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Számítsuk ki a fejdobások számának várható értékét.

Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \le k \le 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelőli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Ezt az összeget közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, mivel $k\binom{100}{k} = 100\binom{99}{k-1}$, ezért

$$E\xi = \sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum_{k=0}^{99} k \binom{99}{k} 2^{-99} = 50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{99} = 50.$$

Valójában a vizsgált várható értéket egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valószínűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$,

11.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét.

Megoldás: Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, melyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték $E\xi = E\sum\limits_{j=1}^{100} \eta_j = \sum\limits_{j=1}^{100} E\eta_j$. $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$. Innen $E\xi = 350$.

Házi feladat:

Feldobunk egy szabályos dobókockát 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások eredményeinek összegét. Számítsuk ki ennek az összegnek a várható értékét.