**A február 5-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.**

*Feladatok:*

1. Egy pénzdarabot, mely $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az írás oldalára feldobunk (egymástól függetlenül) 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

   *Megoldás:* Legyen $\omega$ egy elemi esemény egy 10 hosszúságú fej-írás sorozat. Tekintsük az összes ilyen sorozatból álló halmazt, ez legyen $\Omega$, a biztos esemény. Legyenek a $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra elemei az $\Omega$ halmaz részhalmazai. (Az összes lehetséges részhalmazt tekintjük.) Definiálnunk kell még egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz (esemény) valószínűségét $P(A)$ is. Ezt a következő módon tesszük: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, és $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$, ha az $\omega$ elemi esemény olyan sorozat, amelyik $k$ fej és $10-k$ írásjelből áll. (Ugyanis minden fej-dobás esetén $\frac{1}{3}$ és minden írás-dobás esetén $\frac{2}{3}$-dal, a fej, illetve írásdobás valószínűségével kell megszorozni a valószínűséget.)

2. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót

   a.) visszatevéssel,

   b.) visszatevés nélkül.

   Adjunk erre valószínűségi modellt mind a két esetben.

   *Megoldás:* Az előző feladat megoldásához hasonló konstrukciót adhatunk. Legyenek az $\omega$ elemi események a 25 hosszúságú $P$, $F$ (piros, fehér) jelekből álló sorozatok, az $\Omega$ biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz, $\mathcal{A}$ az $\Omega$ összes részhalmazából álló $\sigma$-algebra, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, és definiálnunk kell még a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Eddig a pontig az a.) és b.) esetet kielégítő konstrukció nem különbözött. A különbség az lesz, hogy a két esetben másképp fogjuk definiálni a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Az a.) esetben, amikor visszatevéssel húzzuk ki a golyókat, egy olyan $\omega$ valószínűsége, amelyik $k$ $P$ és $25-k$ $F$ jelet tartalmaz $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{25-k}$, mert minden piros húzásnak $\frac{20}{50}$ és minden fehér húzásnak $\frac{30}{50}$ a valószínűsége, (a húzás előtt az urnában levő piros illetve fehér golyók száma osztva az urnában levő golyók számával.) A b.) eseben, amikor visszatevés nélkül húzzuk a golyókat, egy olyan $\omega$ valószínűsége, amelyik $k$ $P$ és $25-k$ $F$ jelet tartalmaz $\frac{20 \cdot 19 \cdots (20-k+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(25-k)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valoszínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \frac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a $j$-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a $j$-ik húzás fehér.

Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával, ha $k$ fehér és $25-k$ piros húzás történt.

*Házi feladat:*

Egy szabályos dobókockát feldobunk 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

3. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros. Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   *Megoldás:* Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}$.

   Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvet tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdemes ezeket az érveléseket mégegyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definicióját.

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül.* Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   *Megoldás:* Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{30}{49}=\dfrac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a 16. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz ez $\dfrac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye fehér, a második húzás eredménye piros. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$.

Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, melyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, erért ezek a valószínűségek megegyeznek.

Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy egy előírt konkrét 25 hosszúságú sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat $k$ piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, akkor ennek valószínűsége $P(k) = \frac{29 \cdot 19 \cdots (20-k+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(25-k)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valoszínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \frac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a $j$-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a $j$-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával.

Jelölje $A(k;5,16)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek $k$ piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, és az 5. helyen piros a 16. helyen pedig fehér jel áll. Jelölje továbbá $A(k;1,2)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek $k$ piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, az 1. helyen piros a 2. helyen pedig fehér jel áll. Ekkor a két összehasonlítandó valószínűség $\sum\limits_k A(k;5,16)P(k)$ illetve $\sum\limits_k A(k;1,2)P(k)$. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk a kívánt azonosság teljesülését elegendő belátni azt, hogy $A(k;5,16) = A(k;1,2)$ minden $k$ számra.

Viszont nem nehéz belátni, hogy $A(k;5,16) = A(k;1,2) = \binom{23}{k-1}$, mert mind a két esetben 23 előírt helyre kell írni $k-1$ piros és $25-(k+1)$ fehér golyót.

5. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót egymás után úgy, hogy miután egy golyót kihúztunk, azt visszadobjuk és vele együtt bedobunk két ugyanolyan színű golyót. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az ötödik húzás piros és a tizenhatodik húzás fehér megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér. Ennek az észrevételnek a segítségével számítsuk ki annak valószínűségét, hogy az ötödik húzás piros és a tízenhatodik húzás fehér.

   *Megoldás:* Hasonlóan érvelhetünk mint az előző feladatban. Annak a valószínűsége, hogy a 25 hosszú húzássorozat eredményeként egy előírt piros fehér húzássorozat jelenik meg, csak a sorozatban megjelenő piros és fehér golyók számától függ, de nem függ azok sorrendjétől. Valóban, hasonlóan az előző feladat érveléséhez kapjuk, hogy egy olyan húzássorozat valószínűsége, amelyik $k$ piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz

$$P(k) = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(20+2j)\prod_{l=0}^{25-k}(30+2l)}{50\cdot 49\cdots 26}.$$

Továbbá, ha $A(k;5,16)$ jelöli azon 25 hosszú húzássorozatok számát, melyben $k$ piros, 25 fehér golyót húzunk, az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér, és $A(k;1,2)$ jelöli azon 25 hosszú húzássorozatok számát, melyben $k$ piros, 25 fehér golyót húzunk, az 1. húzás piros és a 2. húzás fehér, akkor mint láttuk $A(k;5,16) = A(k;1,2)$ minden $k$ számra. Ezenkívül, a két összehasonlítandó valószínűség

$$\sum_{k=1}^{24} P(k)A(k;5,16) \quad \text{illetve} \quad \sum_{k=1}^{24} P(k)A(k;1,2)$$

alakban írható fel, ahonnan látható, hogy azok megegyeznek.

A fentiek alapján a keresett valószínűség $\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{52}$ alakban írható fel, mert ez annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második húzás pedig fehér.

*Házi feladat:*

Egy urnában 10 fehér és 10 piros golyó van. Kihúzunk 15 golyót úgy, hogy amikor kihúzunk egy golyót azt visszadobjuk, és vele együtt az urnába dobunk három ugyanolyan színű golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy a negyedik, ötödik és tízenkettedik húzás mindegyike piros?

6. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

   *Megoldás:* Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek $x$ koordinátája megadja, hogy az első ember az $y$ koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált $(x,y)$ pont az egységnégyzet

$$A = \left\{(x,y)\colon\ -\frac{1}{2} \le y-x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1]\times[0,1]$$

   részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

7. Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

   *Megoldás:* Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek $x$ koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az $y$ koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az $(x, y)$ pont a következő $A_1$, $A_2$, $A_3$ és $A_4$ halmazok $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ uniójába esik: $A_1 = \{(x,y)\colon x+y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_2 = \{(x,y)\colon x+(1-y) < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_3 = \{(x,y)\colon 1-x+y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$ és $A_4 = \{(x,y)\colon 1-x+1-y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet melynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0, 3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1 - 0.08 = 0.92$.

8. Egy szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatát leírja egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra tartalmazza az $A_j$ eseményeket, melyek azt jelölik, hogy a $j$-ik dobás fej, $1 \le j < \infty$. Lássuk be, hogy az a $B$ esemény, hogy az első $n$ dobásban levő fejdobások számának $\alpha(n)$ relatív gyakoriságának létezik limesze, ha $n \to \infty$, és az $\dfrac{1}{2}$ benne van az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrb́an.

   *Megoldás:* Lássuk be először, hogy minden $n = 1, 2 \dots$, pozitív egész számra és $\varepsilon > 0$ számra azon $C(n, \varepsilon)$ esemény, hogy a fej-dobások számának relatív gyakorisága a $\left[\dfrac{1}{2} - \varepsilon, \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right]$ intervallumba esik minden $N \ge n$ számra benne van az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrában. Valóban,

$$C(n,\varepsilon) = \bigcap_{N=n}^{\infty} \left( \bigcup_{N(\frac{1}{2}-\varepsilon) \le l \le N(\frac{1}{2}+\varepsilon)} \right.$$
$$\left. \bigcup_{\{j_1,\dots,j_l\} \subset \{1,\dots,N\}} \left( (A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_l}) \cap \bigcap_{s \in \{1,\dots,N\} \setminus \{j_1,\dots,j_l\}} \bar{A}_s \right) \right) \in \mathcal{A}.$$

   Ezután láthatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra az a $C(\varepsilon)$ esemény, hogy létezik olyan $n$ index, melyre a fej-dobások számának relatív gyakorisága a $\left[\dfrac{1}{2} - \varepsilon, \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right]$ intervallumba esik minden $N \ge n$ számra benne van az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrában. Ugyanis,

$$C(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(n,\varepsilon) \in \mathcal{A}.$$

Ezért a minket érdeklő $C$ eseményre kapjuk felhasználva a fenti összefüggést minden $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ számra, $k = 1, 2, \ldots$, hogy a minket érdeklő $B$ eseményre

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} C\left(\frac{1}{k}\right) \in \mathcal{A},$$

amint állítottuk.

9. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

   *Megoldás:* Az esemény, amelyiknek a valószínűségét ki akarjuk számolni, a következő módon is jellemezhető: Először $k$ darab írásdobás történik valamely $k = 0, 1, 2, \ldots$, számmal, majd utána két fejüdobás következik be. Ennek valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

*Házi feladat:*

Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej?