A január 29-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Feladatok:

1. Egy pénzdarabot feldobunk kétszer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás lesz?

   Megoldás: A dobások lehetséges kimenete, (F,F), (F,I), (I,F) és (I,I). Ezen lehetséges kimenetelek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás, azaz az (F,I) vagy (I,F) dobássorozat következik be $\frac{1}{2}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás, azaz az (F,F), (F,I) vagy (I,F) dobássorozatok eredménye következik be, $\frac{3}{4}$.

2. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?

   Megoldás: A dobások összegének eredménye akkor 9, ha a $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ vagy $(6,3)$ dobáspárok valamelyike következik be. Ezen dobássorozatok mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az összeg pontosan 9. Hasonlóan, az összeg akkor 10, ha a $(4,6)$, $(5,5)$ vagy $(6,4)$ dobáspárok valamelyike jelenik meg, és ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Jegyezzük meg, hogy a fenti tárgyalásban az egyes kimenetelek felsorolásában nemcsak azt vettük figyelembe, hogy milyen dobáseredmények jelentek meg, hanem azt is, hogy melyik kockán jelentek meg ezek a dobáseredmények. Miért?

   Házi feladat:

   Három szabályos dobókockát feldobunk. Mi annak a valószínűsége, hogy három hatos lesz a dobások eredménye? Annak, hogy két hatos és egy ötös? Annak, hogy egy egyes egy kettes és egy hármas?

3. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 10 000 alkalommal. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 5000 fej és 5000 írás dobás lesz? Adjunk a kapott valószínűségre jó közelítő becslést a Stirling formula segítségével.

   Megjegyzés: A Stirling formula az $n!$ kifejezésre ad jó becslést nagy pozitív egész számokra. E formula szerint $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

   Megoldás: Egy szabályos pénzdarab 10 000-szeri feldobása esetén minden lehetséges 10 000 hosszú fej-írás sorozat valószínűsége $2^{-10\ 000}$. Összesen $\binom{10\ 000}{5000}$ olyan fej-írás sorozat van, amelyik 5000 fej és 5000 írás jelet tartalmaz. Ezért a keresett valószínűség $\binom{10\ 000}{5000}2^{-10\ 000}$.

   A Stirling formula alapján $\binom{10\ 000}{5000}=\frac{10\ 000!}{(5000!)^2}\sim\frac{\sqrt{2\pi 10\ 000}\left(\frac{10\ 000}{e}\right)^{10\ 000}}{\left(\sqrt{2\pi 5000}\left(\frac{5000}{e}\right)^{5000}\right)^2}$, ahonnan $\binom{10\,000}{5000} \sim \frac{1}{\sqrt{5000\pi}} 2^{10\,000}$. Ezért a keresett valószínűség körülbelül $\frac{\sqrt{2}}{100\sqrt{\pi}} \sim 0.008$.

4. Egy pénzdarabot feldobunnk 10-szer egymás után. Jelölje A_j azt az eseményt, (halmazt) hogy a j-ik dobás eredménye fej, $1 \le j \le 10$. Hogyan értelmezhetjük az A_j eseményt mint halmazt? Fejezzük ki az A_j események segítségével, unió, metszet és halmaz komplementerképzés műveletét használva azt a B eseményt, hogy legalább három fejdobás történt. Fejezzük ki a fenti eseményt úgy is, hogy csak diszjunkt halmazok unióját tekintjük.

   (Beszéljük meg röviden az utolsó formula kapcsolatát a más matematikai tantárgyban már tanult logikai formák konjunktiv normálformjával.)

   Megoldás: Az az esemény, hogy a j_1-ik, j_2-ik és j_3-ik dobás eredménye fej, $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap Aj_3$. Az, hogy legalább három fejdobás történt, azt jelenti, hogy léteznek ilyen $1 \le j_1 \le j_2 \le j_3$ indexek. Ezért a kifejezendő B esemény

$$B = \bigcup_{\substack{j_1,\, j_2,\, j_3 \\ 1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le 10}} A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap Aj_3.$$

   Az unióban szereplő kifejezések nem diszjunktak. De átírhatjuk a kívánt formáan, ha úgy írjuk fel a keresett eseményt, hogy bizonyos $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ indexekre, $s \ge 3$, a dobás eredménye fej, a többi dobás eredménye írás. Ezért

$$B = \bigcup_{s=3}^{10} \bigcup_{\substack{j_1,\, j_2, \dots, j_s \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots j_s \le 10}} \left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap Aj_s \cap \bigcap_{l \in \{1, \cdots, 10\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}} \bar{A}_l \right),$$

   ahol $\bar{A}$ jelöli az A esemény (halmaz) komplementerét.

   Házi feladat:

   Definiáljunk olyan valószínűségi mezőt, melyben lehet vizsgálni egy szabályos dobókocka öt egymásutáni dobásának az eredményét.

5. Egy pénzdarabot feldobunnk végtelen sokszor egymás után. Jelölje A_j azt az eseményt, (halmazt) hogy a j-ik dobás eredménye fej, $1 \le j < \infty$. Fejezzük ki az A_j események segítségével, unió, metszet és halmaz komplementerképzés műveletét használva azt a D eseményt, hogy legalább hogy az első n dobásban történt fejdobások számának limesz szuperiora nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{2}{3}$, ha $n \to \infty$. Fejezzük ki ezt az eseményt az A_j események segítségével úgy is, hogy csak megszámlálható sok halmaz metszetét és unióját szabad vennünk. Beszéljük meg, hogy ez a feladat kapcsolatban van a következő kérdéssel: Ha az A_j események, (tehát azok az események, hogy egy végtelen pénzdobás egyes eredményei fej dobások) benne vannak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező $\mathcal{A}$ σ-algebrájában, akkor az az esemény,

hogy a dobásszámok limesz superiora nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{2}{3}$ szintén benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrában, tehát van értelme ezen esemény valószínűségéről beszélni.

Megoldás: Jelölje $C(k,n)$, $0 \le k \le n$, azt az eseményt, hogy az első n dobásban legalább k fejdobás történt. Ekkor

$$C(k,n) = \bigcup_{\substack{j_1, j_2, \cdots, j_k \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n}} A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots Aj_k.$$

Tekintsünk egy $0 \le < \alpha \le 1$ számot, és definiáljuk azokat a $D(n,\alpha)$, $n = 1, 2, \dots,$ és $D(\alpha)$ eseményeket, amelyek azt jelölik, hogy rögzített n számra van olyan, $N > n$ szám melyre az első N dobásban legalább $[\alpha N]$ fejdobás történt, illetve akármilyen nagy n számra létezik olyan $N > n$ szám, melyre legalább $N\alpha$ fejdobás történt. Itt $[x]$ az x szám egész részét jelöli, azaz a legnagyobb az x számnál kisebb egész számot. Ekkor

$$D(n,\alpha) = \bigcup_{N=n}^{\infty} C([\alpha N], N),$$

$$D(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(n,\alpha).$$

Az az esemény, hogy a limesz szuperior nagyobb vagy egyenlő mint a $\frac{2}{3}$ szám megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a $D(\alpha)$ esemény bekövetkezik minden $\alpha < \frac{2}{3}$ számra. Ezért

$$D = \bigcap_{\alpha < \frac{2}{3}} D(\alpha).$$

Az utolsó kifejezésben kontinum sok (egymásba skatulyázott) esemény metszetét vettük. Viszont ugyanezt a D eseményt kapjuk, ha csak $\alpha = \frac{2}{3} - \frac{1}{n}$, $n \ge 2$ alakú halmazokra vesszük a metszetet. Ezért

$$D = \bigcap_{n=2}^{\infty} D\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n}\right),$$

és ez a kívánt tulajdonságú előállítása a D halmaznak.

De Méré lovag problémája:

Az utolsó két probléma történetileg érdekes. Ezekkel a kérdésekkel fordult de Méré lovag Pascalhoz. Sokan e feladat megoldásától, illetve Pascalnak és Fermat-nak e probléma megoldásáról szóló levelezésétől számítják a valószínűségszámítás megszületését.

a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$-nél kicsit nagyobb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsit kisebb.)

b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, melynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Megoldás:

a.) Annak a valószínűsége, hogy egy dobás eredménye nem hatos $\frac{5}{6}$, annak pedig, hogy 4 egymás utáni dobásban nem jelenik meg a hatos $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Annak a valószínűsége, hogy négy dobásban megjelenik egy hatos $P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy két kocka dobásában nem jelenik meg a dupla hatos $\frac{35}{36}$, annak a valószínűsége, hogy ez 24 dobásban nem jelenik meg $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Annak a valószínűsége, hogy 24 dobásban megjelenik egy dupla hatos $P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Érdemes megérteni, hogy a P_1 és P_2 valószínűségek miért vannak olyan közel egymáshoz. Vezessük be az $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$, számokat. Ekkor $1 - P_1 = a_6^{2/3}$, $1 - P_2 = a_{36}^{2/3}$. Viszont tanultuk az analízisben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$, $e = 2.71\dots$. Továbbá ez az a_n sorozat elég gyorsan tart a határértékéhez, ezért az $a_6 \sim e^{-1}$ és $a_{36} \sim e^{-1}$ elég jó közelítés. Ezért mind a P_1 mind a P_2 valószínűség jól közelíthető az $1 - e^{-2/3}$ számmal. Továbbá ismeretes, hogy az a_n sorozat monoton nő, és innen adódik, hogy $P_1 > P_2$. Történetesen az $1 - e^{-2/3}$ szám közel van $\frac{1}{2}$-hez, és a P_1 és P_2 valószínűségek ezt a számot közrefogják. A P_1 szám értéke $\frac{1}{2} + \frac{23}{1296} \sim 0.5177$.

b.) Tekintsük azt az általánosabb problémát, amikor n nyerés kell a tét megszerzéséhez, és az első játékos k a második pedig l alkalommal nyert. Tekintsük a következő $(n-k) + (n-l) - 1 = 2n - k - l - 1$ fordulót. A természetes osztozkodási elv a következő: Ha az első játékos p_1 a második játékos pedig $p_2 = 1 - p_1$ valószínűséggel nyer, akkor a természetes osztozkodási arány $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{p_1}{1-p_1}$. Számoljuk ki a p_1 valószínűséget.

Az első játékos akkor és csak akkor nyerné el a tétet, ha ezekben a fordulókban legalább $n - k$ alkalommal nyer. Ennek valószínűsége

$$P = 2^{k+l+1-2n} \sum_{j=n-k}^{2n-k-l-1} \binom{2n-k-l-1}{j}.$$

Jelen esetben $k = 3$, $l = 5$, $n = 6$, ezért az első játékos $\dfrac{1}{8}$, a második játékos $\dfrac{7}{8}$ valószínűséggel nyeri el a tétet. Az igazságos tehát az $1:7$ arányú osztozkodás.