A május 7-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, melyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$ és $\mu > 0$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: Adva két független $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvényű ξ és η valószínűségi változó ezek $\xi + \eta$ összegének a sűrűségfüggvénye a

   $$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$$

   konvoluciós formulával megadható sűrűségfüggvény. Jelen esetben, (különös tekintettel arra, hogy $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $u > x$ azt kapjuk, hogy $h(x) = 0$, ha $x < 0$, és

   $$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\,du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{(\mu-\lambda)u}\,du \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} e^{-\mu x} \left[e^{(\mu-\lambda)u} \right]_0^x = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} \left(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x} \right). \end{aligned}$$

   Ha pontosak akarunk lenni meg kell jegyeznünk, hogy a fenti számolás csak $\lambda \ne \mu$ esetben érvényes. Ha $\lambda = \mu$, akkor

   $$h(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)}\,du = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x dx = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

2. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye a $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ függvény, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.

   Megoldás: Ha ξ $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó $h(x)$ valós értékű (mérhető) függvény, akkor $Eh(\xi) = \int h(x)f(x)\,dx$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

   $$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$

   Innen

   $$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t^2/2-(t-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}.$$

3. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, az η valószínűségi változó egyenletes

eloszlású a $0 \le x \le 1$ intervallumban, azaz η sűrűségfüggvénye $g(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$ egyébként. Számítsuk ki a $\xi - \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $g^-(\cdot)$ a $-\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ekkor $g^-(x) = 1$, ha $-1 \le x \le 0$, $g^-(x) = 0$ egyébként, és a $\xi - \eta = \xi + (-\eta)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $h(x) = f * g^-(x)$ függvény, ahol $*$ konvolúciót jelöl. Másrészt, mivel $g^-(x-y) = 1$, ha $x \le y \le x+1$, és $g^-(x-y) = 0$ különben, ezért

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g^-(x-y)\,dy = \int_x^{x+1} f(y)\,dy = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy.$$

Válasszuk szét a következő három esetet: a.) $x < -1$, b.) $-1 \le x \le 0$, c.) $x > 0$. Az a.) esetben, ha $x < -1$ $h(x) = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy = \int_x^{x+1} e^y\,dy = e^{x+1} - e^x$, a b.) esetben, ha $-1 \le x \le 0$ $h(x) = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy = \int_x^0 e^y\,dy + \int_0^{x+1} e^{-y}\,dy = 1 - e^x + 1 - e^{-x-1} = 2 - e^{-x-1} - e^x$, a c.) esetben, ha $x > 0$ $h(x) = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy = \int_x^{x+1} e^{-y}\,dy = e^{-x} - e^{-x-1}$.

4. Az igazak városában a lakosok 71%-a igazat mond, a hazugok városában a lakosok 70%-a hazudik. Mi nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, egyforma eséllyel vagyunk mindkettőben. Megkérdeztünk egy embert, és az azt mondja, hogy ez a hazugok városa. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez az ember hazudik?

   Megoldás: Fogalmazzuk meg formálisan a kérdést és az információinkat. Jelölja A azt az eseményt, hogy az igazak városában vagyunk, és B azt az eseményt, hogy a megkérdezett ember hazudik. Ekkor $P(B|A) = 0.29$, $P(B|\bar{A}) = 0.7$, $P(A) = \frac{1}{2}$. Az az esemény, hogy a megkérdezett ember azt mondja, hogy a hazugok városában vagyunk azt jelenti, hogy az $D = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ esemény következett be. (Vagy az igazak városában vagyunk, és emberünk hazudott, vagy a hazugok városában, és emberünk igazat mondott.) Minket a $P(B|D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)}$ feltételes valószínűség értéke érdekel. $B \cap D = A \cap B$, ahonnan $P(B \cap D) = P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \dfrac{1}{2} \cdot 0.29$. Hasonlóan, $P(D) = F(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})F(\bar{B}|\bar{A}) = \dfrac{1}{2}(0.29 + 0.3)$, ahonnan

$$F(B|D) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.29}{\frac{1}{2}(0.29 + 0.3)} = \frac{29}{59}.$$

   (A megoldás ismertetésében egy X halmaz komplementerét $\bar{X}$-szel jelöltük.)

5. Öt ember között, akiknek a neve $E1, \dots, E5$ véletlenül kiosztunk 100 forintot úgy, hogy minden kialakuló vagyoni helyzet egyformán valószínű. (Mindenki egész számú forintot kap.) Mennyi a valószínűsége annak az eseménynek, hogy $E1$ legalább 1 forintot, $E2$ legalább két forintot … és $E5$ legalább 5 forintot kap?

   Megoldás: A feladat lényegét tekintve kombinatorikus jellegű. Mivel minden szétosztás egyforma valószínű azt a törtet kell kiszámolnunk, melynek nevezőjében az összes olyan pénzelosztás száma van, ahol $E1$ legalább 1 forintot, $E2$ legalább két forintot … és $E5$ legalább 5 forintot kap, míg a nevező az összes lehetséges pénzelosztások számát tartalmazza. A nevező kiszámolása érdekében tekintsük azokat az $(e_1, e_2, \dots, e_5)$ számötösöket, melynek első tagja $E1$ vagyona, második tagja $E1$ és $E2$ együttes vagyona, … ötödik tagja $E1$, E_2, … és $E5$ együttes vagyona. Ekkor a lehetséges $(e_1, e_2, \dots, e_5)$ sorozatok megegyeznek azon (nem feltétlenül szigorúan) növekvő egész számokból álló öt tagú számsorozatok számával, melynek első tagja nem negatív (de lehet nulla is), és az utolsó tagja 100. Az ilyen sorozatok száma megegyezik a nevezővel. Ezek számát viszont könnyen ki tudjuk számolni, ha helyettük az $(e_1 + 1, e_2 + 2, \dots, e_5 + 5)$ sorozatok számát tekintjük, ami megegyezik azon öt tagú pozítiv egész számokból álló szigorúan növekvő számsorozatok számával, melynek utolsó tagja 105. Az ilyen sorozatok száma $\binom{104}{4}$. A számlálót hasonlóan számolhatjuk ki, csak most az $(e_1, e_2 - 1, \dots, e_5 - (1+2+3+4))$ sorozatokat tekintjük, ami megegyezik az öt tagú pozitív egész számokból álló szigorúan monoton növekvő sorozatok számával, melynek legnagyobb tagja 90. (Ha $E1$ vagyonából elveszek 1 forintot, $E2$ vagyonából 2 forintot, … $E5$ vagyonából 5 forintot, akkor a nevező kiszámításánál szereplő feladathoz hasonló feladat jelenik meg azzal a különbséggel, hogy most a szétosztott vagyon 85 forint. Ezért ezen sorozatok száma $\binom{90}{4}$, és a keresett valószínűség $\frac{\binom{90}{4}}{\binom{105}{4}}$.

6. Van egy urnánk abban 20 piros és 30 fehér golyónk. Húzzunk ki 10 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk össze, hogy az első és második, a harmadik és negyedik, az ötödik és hatodik, a hetedik és nyolcadik illetve a kilencedik é tízedik húzásokból álló öt húzáspárból hány olyan van, amelyiknek mind a két tagja piros. Számoljuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Jelölje η_j, $1 \le j \le 5$, azt a valószínűségi változót, mely akkor 1, ha a $2j-1$-ik és $2j$-ik húzás közül mind a kettő piros, és nulla egyébként. Vegyük észre, hogy ekkor az $S = \eta_1 + \dots + \eta_5$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\eta_j = E\eta_1$, $\operatorname{Var}\eta_j = \operatorname{Var}\eta_1$, $\operatorname{Cov}(\eta_j, \eta_k) = \operatorname{Cov}(\eta_1, \eta_2)$, ha $j \neq k$. Ugynanis akármelyik l húzás eredményét nézzük, annak valószínűsége, hogy ezek mindegyike piros megegyezik annak valószínűségével, hogy az első l húzás eredménye piros, és ha felírjuk a vizsgált várható értékek és kovarianciák értékeit, innen következik az állítás. Ezért $E\eta_j = E\eta_1 = \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}$, $\operatorname{Var}\eta_j = \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\left(1 - \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\right)$, $\operatorname{Cov}(\eta_j, \eta_k) = \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\cdot\frac{18}{48}\cdot\frac{17}{47} - \left(\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\right)^2$, ha $j \neq k$. Innen $ES = 5E\eta_1 = 5\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}$, $\operatorname{Var}S = 5\operatorname{Var}\eta_1 + 20\operatorname{Cov}(\eta_1, \eta_2) = 5\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\left(1 - \frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\right) + 20\cdot\left(\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\cdot\frac{18}{48}\cdot\frac{17}{47} - \left(\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}\right)^2\right)$.