

A március 5-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1. Minden m valós számra

$$E(\xi - m)^2 = E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2.$$

Következésképpen

$$\text{Var } \xi = \inf_{-\infty < m < \infty} E[(\xi - m)^2].$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} E(\xi - m)^2 &= E[(\xi - E\xi) + (E\xi - m)]^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 - 2E(\xi - m)E(\xi - E\xi) + E(\xi - m)^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 + ((E\xi) - m)^2, \end{aligned}$$

mert $2E(\xi - m)E(\xi - E\xi) = 2E(\xi - m)(E\xi - E\xi) = 0$. Ebből az azonosságból adódik, hogy $E(\xi - m)^2 \geq E(\xi - E\xi)^2$ minden m valós számra. Viszont $m = E\xi$ esetén az egyenlőtlenség két oldala megegyezik.

2. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a várható értéket és szórásnégyzetet kifejező összeget másrészt egyszerűbben a független valószínűségi változók szórásnégyzetét kifejező képlet segítségével.

Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0 \leq k \leq 100$, $p_k = \binom{100}{k} 2^{-100}$. Ezért a dobások

számának várható értéke $E\xi = \sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100}$, ahol ξ jelöli a fejdobások számát

megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2 = \sum_{k=0}^{100} k^2 \binom{100}{k} 2^{-100}$, a szórásnégyzet

pedig $\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk.

Valóban, $k \binom{100}{k} = 100 \binom{99}{k-1}$, $E\xi = \sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} 2^{-100} = 50 \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} 2^{-99} =$

$50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^{99} = 50$. Továbbá, $k^2 \binom{100}{k} = [k(k-1) + k] \binom{100}{k} = 100 \cdot 99 \cdot \binom{98}{k-2} +$

$100 \cdot \binom{100}{99}$, $E\xi^2 = \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 99 \cdot \sum_{k=0}^{98} \binom{98}{k} + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} = 25 \cdot 99 + 50$,

$\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 25$.

Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valószínűségi változókat, $\xi_j = 1$, ha a j -ik dobás eredménye fej $\xi_j = 0$, ha a j -ik dobás eredménye írás, $1 \leq j \leq 100$. Ekkor a

fejdobások száma $\xi = \sum_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\text{Var } \xi = \sum_{j=1}^{100} \text{Var } \xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\text{Var } \xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \leq j \leq 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $\text{Var } \xi = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.

3. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobás-eredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ független valószínűségi változók, melyekre $P(\eta_j = k) = \frac{1}{6}$, $1 \leq j \leq 100$, $1 \leq k \leq 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és

szórásnégyzet $E \sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\text{Var } \sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} \text{Var } \eta_j$. (A második reláció

felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \frac{1}{6}(1+2+3+$

$4+5+6) = 3.5$, $E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$, $\text{Var } \eta_j = \frac{35}{12}$, $E\xi = 350$,

$\text{Var } \xi = \frac{3500}{12}$.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások dobáseredményeinek összegét és számítsuk ki annak szórásnégyzetét.

4. Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j , $1 \leq j \leq 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j -ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j -ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámol-

nunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $\text{Var } \xi_j = \text{Var } \xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_jE\xi_k =$

$E\xi_1\xi_2 - E\xi_1E\xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \neq k$. Innen a 20 dobásban kihúzott

piros golyók számának várható értéke $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$ és szórásnégyzete $20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot$

$\frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

Házi feladat:

Legyen egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót, és minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik azonos színű golyóval együtt. Számoljuk a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megjegyzés: Használjuk az előző gyakorlat eredményét arról, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy adott húzásban piros golyót húzzunk vagy két különböző húzás mindegyikében piros golyót húzzunk.

5. Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a j -ik dobás eredménye k , $1 \leq j \leq 10$, $1 \leq k \leq 6$. Ekkor az $E \left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega) \right)^3$ várható értéket kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega) \right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik $10 \xi_j^3$ alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3 \cdot 10 \cdot 9 \xi_j^2 \xi_k$, $j \neq k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges (j, k) párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a k (csak egyszer szereplő tényező) három helyen szerepelhet. Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2 \xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j \xi_k \xi_l$ alakú tag, ahol a j , k és l indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j \xi_k \xi_l = (E\xi_1)^3$. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban. Innen
$$\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega) \right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1(E\xi_1)^2 + 720(E\xi_1)^3 = 4410 + 14332.5 + 3087 = 218295.5$$
, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \frac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 441$.

6. Feldobunk egy dobókockát, majd ezután egy szabályos pénzdarabot annyi alkalommal, amennyi a kockadobás eredménye volt. (Az egyes dobások eredményei függetlenek egymástól.) Számoljuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő $\xi_{j,k}$, $1 \leq j \leq 6$, $1 \leq k \leq j$, valószínűségi változókat:

$$\xi_{j,k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé fej} \\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé írás} \\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye nem } j \end{cases}$$

Ekkor minket az $S = \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^j \xi_{j,k}$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Vegyük észre, hogy

$$E\xi_{j,k} = P(\text{a kockadobás eredménye } j, \text{ a } k\text{-ik pénzdobásé fej}) = \frac{1}{12},$$

$E\xi_{j,k}^2 = \frac{1}{12}$, $\text{Var} \xi_{j,k}^2 = \frac{11}{144}$, $E\xi_{j,k} \xi_{j,k'} = \frac{1}{24}$, ha $k \neq k'$, ahonnan $\text{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j,k'}) = \frac{5}{144}$ ebben az esetben. Továbbá $E\xi_{j,k} \xi_{j',k'} = 0$, $\text{Cov}(\xi_{j,k} \xi_{j',k'}) = -\frac{1}{144}$, ha $j \neq j'$ (függetlenül a k és k' számok viszonyától. Innen, $ES = \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^j E\xi_{j,k} =$

$$\frac{1 + \dots + 6}{12} = \frac{21}{12}, \text{ és}$$

$$\text{Var } S = \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^j \text{Var } \xi_{j,k} + \sum_{(j,k),(j',k'): j \neq j' \text{ vagy } k \neq k'} \text{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j',k'}),$$

ahonnan $\text{Var } S = \frac{11}{144}(1 + \dots + 6) - \frac{1 \cdot (21 - 1) + 2 \cdot (21 - 2) + \dots + 6 \cdot (21 - 6)}{144} + \frac{5}{144}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 6 \cdot 5)$. Ezt a képletet úgy kapjuk, hogy külön számoljuk azon $\text{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j',k'})$ mennyiségek hozzáadókát melyekre $j \neq j'$ és azután azokét, melyekre $j = j'$, de $k \neq k'$. Innen $\text{Var } S = \frac{231 - 350 + 350}{144} = \frac{77}{21}$.

Az előbbi feladat megoldásában megjelenő egyszerű alakú végeredménynek, (a megjelenő kiejtéseknek) mélyebb oka van. Ez a következő feladat témája.

7. Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots , független, egyforma eloszlású (diszkrét) valószínűségi változók, τ ezektől a valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, mely csak $0, 1, 2, \dots, N$ értékeket vesz fel valamilyen N pozitív egész számmal. Legyen $S = S_\tau = \sum_{j=0}^{\tau} \xi_j$. Ekkor $ES = E\tau \cdot E\xi_1$. Ha ezenkívül $E\xi_1 = 0$, akkor $ES^2 = E\tau \cdot E\xi_1^2$.

Általában $\text{Var } S = E\tau \cdot \text{Var } \xi_1 + (E\xi_1)^2 \cdot \text{Var } \tau$.

Megoldás: Jelölje $I(\tau = k)$ az $\{\omega : \tau(\omega) = k\}$ esemény indikátorfüggvényét, és legyen $S_k = \sum_{j=1}^k \xi_j$. Ekkor

$$\begin{aligned} ES &= \sum_{k=0}^N ES_k I(\tau = k) = \sum_{k=0}^N ES_k EI(\tau = k) = \sum_{k=0}^N kE\xi_1 P(\tau = k) \\ &= E\xi_1 \sum_{k=0}^N kP(\tau = k) = E\xi_1 \cdot E\tau \end{aligned}$$

a függetlenségi tulajdonságok miatt. Hasonlóan, ha $E\xi_1 = 0$, akkor

$$\begin{aligned} ES^2 &= \sum_{k=0}^N ES_k^2 I(\tau = k) = \sum_{k=0}^N ES_k^2 EI(\tau = k) = \sum_{k=0}^N kE\xi_1^2 P(\tau = k) \\ &= E\xi_1 \sum_{k=0}^N kP(\tau = k) = E\xi_1 \cdot E\tau, \end{aligned}$$

mert ebben az esetben $ES_k^2 = \left(\sum_{j=1}^k \xi_j \right)^2 = \sum_{j=1}^k E\xi_j^2 + \sum_{j \neq k} E\xi_j E\xi_k = \sum_{j=1}^k E\xi_j^2 = kE\xi_1^2$.

Végül az utolsó állítás bizonyításában legyen $\bar{\xi}_k = \xi_k - E\xi_k$, $\bar{S} = \sum_{k=0}^{\tau} \bar{\xi}_k$. $\bar{S}_k = \sum_{j=0}^k \bar{\xi}_j$,
 $1 \leq k \leq N$.

Ekkor

$$\text{Var } S = E(\bar{S} + \tau E\xi_1)^2 - (ES)^2 = E\bar{S}^2 + 2E\tau\bar{S} \cdot E\xi_1 + E\tau^2(E\xi_1)^2 - (E\tau E\xi_1)^2.$$

Innen $\text{Var } S = E\tau \text{Var } \xi_1 + (E\xi_1)^2 (E\tau^2 - (E\tau)^2) = E\tau \cdot \text{Var } \xi_1 + (E\xi_1)^2 \cdot \text{Var } \tau$,
mert $E\tau\bar{S} = \sum_{k=0}^N P(\tau = k)E\bar{S}_k = 0$, és $E\bar{S}^2 = E\tau E\xi_1^2 = E\tau \text{Var } \xi_1$.