A december 10-i gyakorlaton tárgyalt feladat

Dobjunk le az origó középpontú egységkörre egymástól függetlenül egyenletes eloszlással 18 000 pontot. Adjunk jó közelítő becslést a több-dimenziós centrális határeloszlástétel segítségével arra, hogy a ledobobott pontok első koordinátáinak az összege kisebb, mint 80, második koordinátáinak az összege pedig kisebb, mint -80.

Jelölje a j-ik ledobott pont x illetve y koordinátáját ξ_j és η_j, és legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10\ 000} \xi_j$, $T = \sum\limits_{j=1}^{10\ 000} \eta_j$. Ekkor minket a $P(S < 80, T < -80)$ valószínűség (jó közelítő̋) értéke érdekel. A több-dimenziós centrális határeloszlástétel alapján a $P\left(\frac{(S-ES)}{100} < x, \frac{(T-ET)}{100} < y\right)$ valószínűség jól közelíthető annak a két-dimenziós normális eloszlásfüggvény $\Phi(x,y)$ értékével, mely e egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású (X,Y) vektor eloaszlásfüggvénye, melyre $VarX = \operatorname{Var}\xi_1$, $\operatorname{Var}Y = \operatorname{Var}\eta_1$, és $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(\xi_1,\eta_1)$. Számítsuk ki az $E\xi_1$, $E\eta_1$, $E\xi_1^2$, $E\eta_1^2$ és $E\xi_1\eta_1$ várhatú értékeket.

$$E\xi_1 = \frac{1}{\pi}\int_{(u,v):\ u^2+v^2\le 1} u\,du\,dv = 0, \quad E\eta_1 = \frac{1}{\pi}\int_{(u,v):\ u^2+v^2\le 1} v\,du\,dv = 0$$

Az, hogy ezen integrálok értéke nulla paritási meggondolásokból látható. Ugyanis az első integrált először a v változó szerint integrálva, egy a v változóban páratlan függvényt kapunk. Hasonlóan kapjuk, hogy a második integrál nulla, először az u változó szerint integrálva. Hasonló meggondolásokból látható, hogy

$$E\xi_1\eta_1 = E\xi_1 = \frac{1}{\pi}\int_{(u,v):\ u^2+v^2\le 1} uv\,du\,dv = 0.$$

Végül, könnyen látható, hogy $E\xi_1^2 = E\eta_1^2$, ezért elég $E\xi_1^2$-t kiszámolni. Viszont

$$E\xi_1^2 = \frac{E(\xi_1^2+\eta_1^2)}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{(u,v):\ u^2+v^2\le 1} (u^2+v^2)\,du\,dv,$$

ahonnan polár-koordinátás helyettesítéssel

$$E\xi_1^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot r^2\,dr\,d\varphi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

A fenti számolások azt jelentik, hogy a tekintett (V,V) normális eloszlú véletlen vektor mátrixa diagonális, ezért koordinátái függetlenek, ezenkívül mind U mind V szórásnégyzete $\frac{1}{4}$. Továbbá,

$$\begin{aligned} P(S<80, T<-80) &= P\left(\frac{(S-ES)}{100} < 0.8, \frac{(T-ET)}{100} < -0.8\right) \\ &\sim P(U<0.8, V<-0.8) = P(U<0.8)P(V<-0.8) \\ &= P(2U<1.6)P(2V<-1.6) = \Phi(1.6)(1-\Phi(1.6)). \end{aligned}$$