DOLGOZAT FELADATOK

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Legyen ξ egy várható értékű és egy szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye a $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/2}$ függvény, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.
2. Legyen ξ és η két független exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ és μ paraméterrel, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$, illetve $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.
3. Adott két urna, mindkettőben 5 fehér és 10 piros golyó. Elvégzünk 10 húzást, mindegyik alkalommal kihúzunk egy-egy golyót a két urnából visszatevés nélkül. Ha egyforma színű golyókat húzunk, akkor 2 forintot nyerünk, ha különböző színűeket, akkor 1 forintot veszítünk. Számoljuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.
4. Péter és Pál a következő játékot játssza. Mind a ketten feldobnak egy szabályos dobókockát. Ha Pál dobott nagyobbat, akkor ő nyer három forintot Pétertől, ha Péter dobása nagyobb, akkor Pál fizet Péternek három forintot. Ha a dobások egyenlőek, akkor senki sem fizet a másiknak. Ezt a játékot játsszák 3000 alkalommal. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy Péter legalább 90 forintot nyer.
5. Mikor konvergál $F_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata eloszlásban egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez?

MEGOLDÁSOK

1. Ha ξ $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó $h(x)$ valós értékű (mérhető) függvény, akkor $Eh(\xi) = \int h(x)f(x)\,dx$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-(x-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$

Innen

$$\begin{aligned} Ee^{t\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx-(x-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(t+1)x-x^2/2-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(t+1)^2/2-(t+1-x)^2/2-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{(t+1)^2/2-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2+t}. \end{aligned}$$

Valójában van egyszerűbb megoldás is. Ha ξ normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 1 szórással, akkor $\xi = \eta + 1$, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó, ezért $Ee^{t\eta} = Ee^{t(\eta+1)} = e^t Ee^{t\eta} = e^t e^{t^2/2}$.

Ez utóbbi megoldás majdnem ugyanaz, mintha a vizsgált integrálban az $y = x - 1$ helyettesítést alkalmaznánk.

$$\begin{aligned} Ee^{t\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx-(x-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t(y+1)-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy \\ &= e^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ty-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = e^t e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

2. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-y)\,du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x - u < 0$, azaz $u \geq x$. Innen

$$f * g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\,du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{(-\lambda-\mu)u}\,du, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f * g(x) = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \quad \text{ha } x \geq 0 \text{ és } \lambda \neq \mu$$

és abban az esetben, ha $\lambda = \mu$, akkor

$$f * g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x \geq 0.$$

3. Legyen ξ_j, $1 \leq j \leq 10$, az a valószínűségi változó, amelyik 2, ha a j-ik húzásban két piros vagy két fehér golyót húzunk és, -1 ha az egyik húzás piros a másik fehér. Ekkor az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ valószűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Mivel $E\xi_j = E\xi_1$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2)$, ezért a keresett mennyiségek $ES = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j = 10E\xi_1$ és $\operatorname{Var} S = \sum\limits_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j + \sum\limits_{1 \leq j,k \leq 10\ j \neq k} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 10\operatorname{Var}\xi_1 + 90\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Másrészt, $P(\xi_1 = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$, $P(\xi_1 = -1) = \frac{4}{9}$, $P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 2) = \frac{4}{9}\frac{9^2+5^2}{14^2} + \frac{1}{9}\frac{10^2+4^2}{14^2} = \frac{15}{49}$, $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 2) - P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 2) = \frac{110}{441}$, $P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 1) - P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 2) = \frac{181}{441}$, ahonnan $E\xi_1 = 2 \cdot \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$, ahonnan $E\xi_1^2 = 4 \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \frac{20}{9}$, $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 4P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 2) - 2P(\xi_1 = 2, \xi_2 = -1) - 2P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 2) + P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1) - (E\xi_1)^2 = \frac{540}{441} - \frac{440}{441} + \frac{181}{441} - \frac{4}{9} = \frac{232}{441}$, ahonnan $ES = \frac{20}{3}$, $\operatorname{Var} S = \frac{200}{9} + 90 \cdot \frac{232}{441}$.

4. Legyen ξ_j Péter nyereménye a j-ik játékban. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, Péter össznyereménye $S = \sum\limits_{j=1}^{3000} \xi_j$, és $P(\xi_j = 3) = \frac{5}{12}$, $P(\xi_j = -3) =$

$\frac{5}{12}$, $P(\xi_j = 0) = \frac{1}{6}$. (Annak valószínűségét írtuk fel, hogy Péter vagy Pált dob nagyobbat, illetve hogy a két dobás egyenlő. Innen $E\xi_j = 0$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 = \frac{45}{6}$, $ES = 0$, $\operatorname{Var} S = 15 \cdot 1500 = 150^2$. Innen annak valószínűsége, hogy Péter legalább 90 forintot nyer

$$P(S \ge 90) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \ge \frac{90}{150}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < 0.6\right) \sim 1 - \Phi(0.6) \sim 0.274$$

5. Az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez, ha az F eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában teljesül a $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ reláció.

   Szerepelt egy eredmény, amelyik szerint meg lehet adni egy ezzel ekvivalens megfogalmazást is. Azt is elfogaldtam, ha valaki ez utóbbi eredmény segítségével fogalmazta meg a definiciót. Eszerint az F_n eloszlásfüggvények akkor konvergálnak eloszlásban egy F eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen folytonos és korlátos $h(x)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \int h(x) F_n(\,dx) = \int h(x) F(\,dx).$$