A Valószínűségszámítás II. előadássorozat tízenkettedik előadása.

2002. december 3.

A nagy számok törvényéről. Második rész.

Láttuk, hogy mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének bizonyításához arra van szükségünk, hogy képesek legyünk független (és egyforma eloszlású), nulla várható értékű $\xi_1, \xi_2, \dots$, valószínűségi változók $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, $n = 1, 2, \dots$, összegének eloszlásfüggvényére jó becslést tudjunk adni. Pontosabban arra van szükségünk, hogy jól meg tudjuk becsülni minden n indexre és rögzített $\varepsilon > 0$ számra a $P(|S_n| > \varepsilon n)$ valószínűségeket. Valójában a nagy számok erős törvényének a bizonyításában hasznosabb, ha a $P\left(\sup\limits_{1\le m\le n} |S_m| > \varepsilon n\right)$ valószínűségeket jól meg tudjuk becsülni. Felmerülhet a kérdés: Nem lehet-e a $P(S_n > \varepsilon n)$ alakú valószínűségekre a centrális határeloszlástétel segítségével adni jó becslést?

A válasz erre a kérdésre nemleges. Ugyanis a centrális határeloszlástétel a $P(S_n > x\sqrt{n})$ alakú valószínűségekre ad jó aszimptotikát nagy n indexre, és *rögzített, az n indextől független x* számra. De szabad-e rögzített x helyett n-től függő $x_n = \varepsilon\sqrt{n}$ számot írni, és alkalmazni formálisan a centrális határeloszlástételben szereplő képletet nem törődve az x_n számnak az n indextől való függésével? Az, hogy e kérdés felvetésénél nem formális kötőzködésről van szó mutatja a következő egyszerű példa: Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$, $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$. Ekkor a $p_n(x) = P\left(S_n \ge nx\right)$ valószínűségre $p_n(x) = 0$, ha $x > 1$, és $p_n(x) = 2^{-n}$, ha $x = 1$. (Az $x < 1$ esetben is jó aszimptotikus formulát lehet adni a $p_n(x)$ mennyiségre, de ahhoz külön vizsgálódás lenne szükséges, ezért ezt most nem tesszük.) Ez a példa azt mutatja, hogy a $p_n(x)$ függvény nem viselkedik mindig úgy, ahogyan azt a centrális határeloszlástételből adódó formális analógia sugallná. A $P(S_n \ge nx)$ alakú valószínűségek vizsgálatával a valószínűségszámítás egyik fontos és érdekes fejezete a nagy eltérések elmélete foglalkozik. Ez az elmélet nem témája jelen előadássorozatnak.

Ismertetem az úgynevezett Kolmogorov egyenlőtlenséget, amelyik nagyon hasznos a nagy számok erős törvényének bizonyításában. Itt csak magát az egyenlőtlenséget fogalmazom meg, a bizonyítást a kiegészítésben írom le.

Kolmogorov egyenlőtlenség. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, (nem feltétlenül egyforma eloszlású) valószínűségi változók, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $S_k = \sum\limits_{p=1}^{k} \xi_p$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor*

$$P\left(\sup_{1\le k\le n} |S_k| \ge x\right) \le \frac{ES_n^2}{x^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}{x^2}$$

minden $x > 0$-ra.

Érdemes észrevenni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a felső becslést adja annak valószínűségére, hogy az S_k részletösszegek abszolut értékének $\sup\limits_{1\le k\le n} |S_k|$ szuprémuma nagyobb, mint valamilyen $x>0$ szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad annak az eseménynek a valószínűségére, hogy az utolsó $|S_n|$ tag abszolut értéke nagyobb, mint x. Természetesen

$$P\left(\sup_{1\le k\le n} |S_k|>x|\right)\ge P\left(S_n|>x|\right),$$

de mint ahogy a Kolmogorov és Csebisev egyenlőtlenség összehasonlítása is sugallja, a fenti egyenlőtlenség baloldala nem sokkal nagyobb mint a jobboldala.

Felidézem a nagy számok (éles formában megfogalmazott) erős törvényének még be nem bizonyított elégséges felét.

A nagy számok erős törvényének elégséges feltétele. *Legyen ξ_1, ξ_2, ..., független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek teljesítik az $E|\xi_1|<\infty$ feltételt. Definiáljuk az $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $n=1,2,\dots$, részletösszegeket. Ekkor $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ átlagok teljesítik a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n}=E\xi_1 \quad \textit{majdnem minden } \omega\in\Omega\textit{-ra.}$$

relációt.

Most megmutatom, hogy bizonyítható ez az állítás a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével.

A nagy számok erős törvényének elégséges felét megfogalmazó állítás bizonyítása. Fel fogjuk tenni, hogy $E\xi_1=0$. Ehhez jogunk van, mert helyettesítve a ξ_n valószínűségi változókat a $\xi_n-E\xi_n$ valószínűségi változókkal teljesül ez a feltétel, és az általános eset könnyen következik az erre a speciális esetre megfogalmazott állításból.

Természetes gondolat szétválasztani a ξ_n valószínűségi változók túl nagy és nem túl nagy értékeinek a hatását a bizonyításban. Ez sugallja, hogy érdemes a ξ_n valószínűségi változók következő felbontását venni: $\xi_n=\xi_n I(|\xi_n|\le n)+\xi_n I(|\xi_n|>n)=\xi'_n+\xi''_n$, ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Azt, hogy a ξ_n valószínűségi változó értékeit az n szinten csonkítottuk az teszi természetessé, hogy az előző előadás végén bizonyított lemma alapján az $E|\xi_1|<\infty$ feltétel ekvivalens a $\sum\limits_{n=1}^\infty P(\xi''_n=0)=\sum\limits_{n=1}^\infty P(|\xi_n|>n)=\sum\limits_{n=1}^\infty P(|\xi_1|>n)<\infty$ egyenlőtlenséggel. Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján a ξ''_n valószínűségi változók egy valószínűséggel véges sok kivétellel nullával egyenlőek. Ezért elegendő azt bizonyítani, hogy a $\dfrac1n\sum\limits_{k=1}^n \xi'_k$, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók egy valószínűséggel nullához konvergál. Először lássuk be azt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E\xi'_k = 0$, ez ugyanis lehetővé teszi, hogy a bizonyítandó állítást arra redukáljuk, hogy a $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi'_k - E\xi'_k)$ átlagok tartanak egy valószínűséggel nullához, azaz nulla várható értékű valószínűségi változók átlagát elég vizsgálni. A bizonyítandó állítás azért igaz, mert $\sum\limits_{k=1}^{n} E\xi'_k = -\sum\limits_{k=1}^{n} E\xi''_k$, és

$$\begin{aligned}\left|-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\xi''_k\right| &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E|\xi''_k| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} E|\xi_1|I(k-1\le|\xi_1|<k) + E|\xi_1|I(|\xi_1|\ge n)\\ &\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{n}P(k\le|\xi_1|<k+1) + E|\xi_1|I(|\xi_1|\ge n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}P(k\le|\xi_1|<k+1) + E|\xi_1|I(|\xi_1|\ge n)\end{aligned}$$

Az utolsó becslés jobboldalán szereplő kifejezés nullához tart, ha $n\to\infty$. Ugyanis az $E|\xi_1|<\infty$ feltételből következik egyrészt, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_1|I(|\xi_1|\ge n) = 0$, másrészt az, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $L = L(\varepsilon)$, hogy $\sum\limits_{k=L}^{\infty} kP(|\xi_k|I(k-1\le|\xi_1|< k)<\varepsilon$, ahonnan $\sum\limits_{k=L}^{n}\frac{k^2}{n}P(k\le|\xi_1|<k+1)\le\sum\limits_{k=L}^{\infty} kP(|\xi_k|I(k-1\le|\xi_1|<k)<\varepsilon$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{L}\frac{k^2}{n}P(k\le|\xi_1|<k+1)=0$. Mivel a fenti becslések minden $\varepsilon>0$ számra elmondhatóak, ezért az előzőekből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}E\xi_k=0$, mint állítottuk.

Megmutatjuk, hogy a Borel–Cantelli lemma alapján a redukált állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon>0$ számra

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sup_{1\le k\le 2^n}\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\xi'_j - E\xi'_j\right)\right| > \varepsilon 2^n\right) < \infty \qquad (*)$$

Ekkor ugyanis tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz, és majdnem minden $\omega\in\Omega$ elemi eseményre létezik olyan $n_0=n_0(\omega,\varepsilon)$ küszöbindex, melyre $\sup\limits_{1\le k\le 2^n}\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\xi'_j(\omega)-E\xi'_j(\omega)\right)\right|\le\varepsilon 2^n$, ha $n\ge n_0$. Ezért, ha $k\ge 2^{n_0}$, akkor létezik olyan $n_1=n_1(k)$ index, melyre $2^{n_1}\le k<2^{n_1}$, és $\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\xi'_j(\omega)-E\xi'_j(\omega)\right)\right|\le e2^{n_1+1}\le 2\varepsilon k$. Mivel ez tetszőleges $\varepsilon=\frac{1}{j}$ számra elmondható, és innen következik, hogy egy valószínűségi $\omega\in\Omega$ halmazra $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\xi'_j(\omega)-E\xi'_j(\omega)\right)\right|\to 0$. Viszont a nagy számok erős törvényét ennek az állításnak a bizonyítására redukáltuk.

A $(*)$ formulában olyan valószínűségek összegének a konvergenciáját kell megmutatni, melyeket a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével tudunk megbecsülni. A Kolmogorov egyenlőtlenség szerint

$$P\left(\sup_{1\le k\le 2^n}\left|\sum_{j=1}^{k}(\xi_j'-E\xi_j')\right|>\varepsilon 2^n\right)\le\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^n}\operatorname{Var}\xi_j'}{\varepsilon^2 2^{2n}}\le\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^n}E{\xi_j'}^2}{\varepsilon^2 2^{2n}},$$

ezért elég megmutatni azt, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-2n}\sum_{j=1}^{2^n}E{\xi_j'}^2<\infty, \tag{$**$}$$

ha $E|\xi_1|<\infty$.

A $(**)$ formula bizonyítása érdekében írjuk fel az $E{\xi_j'}^2=\sum\limits_{l=1}^{j}E|\xi_1|^2I(l-1\le|\xi_1|<l)\le\sum\limits_{l=1}^{j}lE|\xi_1|I(l-1\le|\xi_1|<l)$ relációt az e formulában szereplő mindegyik tagra, és számoljuk össze, hogy átrendezve az így kapott összeget, mint az $E|\xi_1|I(l-1\le|\xi_1|<l)$ kifejezések lineáris kombinációját mi lesz az $E|\xi_1|I(l-1\le|\xi_1|<l)$ tag együtthatója. Ha $2^{m-1}<l\le 2^m$, akkor ez az együttható $\sum\limits_{n=m}^{\infty}(2^n-l)l2^{-2n}\le l\sum\limits_{n=m}^{\infty}2^{-n}\le 2l2^{-m}\le 4$, ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-2n}\sum_{j=1}^{2^n}E{\xi_j'}^2<4\sum_{l=1}^{\infty}E|\xi_1|I(l-1\le|\xi_1|<l)\le 4E|\xi_1|<\infty.$$

Ezzel a tételt beláttuk.

A Kolmogorov egyenlőtlenség alkalmas arra is, hogy jellemezzük azt, hogy független valószínűségi változók összegei mikor konvergálnak egy valószínűséggel. Először az alábbi viszonylag gyengébb, de sokszor jől használható eredményt ismertetem, melyet szoktak Kolmogorov-féle egy sor tételnek nevezni, (utalva az utána ismertetett tartalmasabb Kolmogorov féle három sor tételre).

Kolmogorov-féle egy sor tétel. *Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független valószínűségi változók, melyeknek létezik az $E\xi_k^2<\infty$ második momentumai minden $k=1,2,\dots$ számra. Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{Var}\xi_k<\infty$, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\xi_k-E\xi_k)$ sorozat egy valószínűséggel konvergál.*

A fenti eredmény elégséges feltételt ad arra, hogy független valószínűségi változók összege mikor konvergál egy valószínűséggel. Az alább ismertett eredmény, melyet az irodalomban Kolmogorov-féle három sor tételnek neveznek, megadja e tulajdonság szükséges és elégséges feltételét.

Kolmogorov-féle három sor tétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók. Rögzítsünk valamely $C > 0$ számot, és definiáljuk a $\xi'_k = \xi_k I(\{|\xi_k| < C\})$ valószínűségi változókat, $k = 1, 2, \dots,$ ahol $I(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ halmaz indikátorfüggvénye. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$ véletlen összeg akkor és csak akkor konvergens egy valószínűséggel, ha a ξ_k, $k = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változók sorozata teljesíti a következő feltételeket:*

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\xi_k \neq \xi'_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k| \geq C) < \infty,$

(ii) *A* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E\xi'_k$ *összeg konvergens.*

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \xi'_k < \infty.$

1. megjegyzés: Az előbb kimondott eredmények azt sugallják, hogy közvetlen módon be lehet látni az alábbi állításokat:

a) Ha a Kolmogorov-féle három-sor tétel feltételei teljesülnek valamely $C > 0$ számra, akkor ezek a feltételek teljesülnek tetszőleges $\bar{C} > 0$ számra.

b.) Ha a xi_k valószínűségi változók teljesítik a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \xi_k < \infty$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E\xi_k < \infty$ feltételeket, akkor teljesítik a Kolmogorov három sor tétel feltéteit is.

Ezeket az állításokat, melyek következnek a Kolmogorov-féle egy sor és három sor tételből, be lehet bizonyítani közvetlenül is, de ezt most elhagyom.

2. megjegyzés: Az előző két eredményben annak adtuk meg a feltételét, hogy független valószínűségi változók sorozata egy valószínűséggel konvergáljon. Érdemes megjegyezni, hogy a valószínűségszámítás egyik alapvető eredménye, az úgynevezett 0–1 törvény, alapján meg lehet mutatni, hogy független valószínűségi változók sorozata vagy 1 valószínűséggel konvergens vagy 1 valószínűséggel divergens. Tehát nem lehetséges megadni független valószínűségi változókat, melyek összegei például 1/2 valószínűséggel konvergálnak és 1/2 valószínűséggel divergálnak. Hasonló állítás mondható független valószínűségi változók átlagairól. Csak két eset lehetséges. Vagy egy valószínűséggel konvergálnak egy konstanshoz vagy egy valószínűséggel divergálnak (nem konvergálnak). Ha marad rá idő, akkor később a most említett nulla-egy törvény tárgyalására is rátérek.

A Kolmogorov-féle egy-sor tétel bizonyítása: Elég megmutatni, hogy a tétel feltételeinek teljesüléseinek teljesülése esetén az $S_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k(\omega) - E\xi_k(\omega))$, $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók sorozata egy valószínűséggel Cauchy sorozat. Megmutatatjuk, hogy elegendő azt megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geq n} \left|\sum_{j=n}^{k} (\xi_j - E\xi_j)\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{+}$$

Valóban, definiáljuk az $A(n,\varepsilon) = \left\{\omega\colon \sum\limits_{k=m}^{M} (\xi_k(\omega) - E\xi_k(\omega)) < 2\varepsilon, \text{ ha } M \geq m \geq n\right\}$ halmazokat. Ekkor $\lim\limits_{n\to\varepsilon} P(A(n,\varepsilon)) = 1$, mert

$$\Omega \setminus A(n,\varepsilon) \subset \left\{\omega\colon \sup_{k\geq n} \left|\sum_{j=n}^{k} (\xi_j(\omega) - E\xi_j(\omega))\right| > \varepsilon\right\},$$

és az utóbbi esemény valószínűsége nullához tart. Továbbá az $A(n,\varepsilon)$ halmazok rögzített ε számra egymásba skatulyázott halmazok. Ezért minden $\varepsilon > 0$-ra az $\Omega(\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A(n,\varepsilon)$ halmazra $P(\Omega(\varepsilon)) = 1$ és minden $\omega \in \Omega(\varepsilon)$ elemi eseményre létezik olyan $n_0 = n_0(\omega)$ küszöbindex, melyre $M \geq m \leq n_0$ esetén $|S_M(\omega) - S_m(\omega)| < 2\varepsilon$. Ekkor az $\bar\Omega = \bigcap\limits_{l=1} \Omega\left(\frac{1}{l}\right)$ halmazra $P(\bar\Omega) = 1$, és minden $\omega \in \bar\Omega$ halmazra az $S_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ sorozat Cauchy sorozat. Ezért elég bebizonyítani a (+) relációt.

Viszont a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\sup_{k\geq n} \left|\sum_{j=n}^{k} (\xi_j - E\xi_j)\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{N\geq k\geq n} \left|\sum_{j=n}^{k} (\xi_j(\omega) - E\xi_j(\omega)\right| \geq \varepsilon\right)$$
$$\leq \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=n}^{N} \operatorname{Var}\xi_j}{\varepsilon^2} = \frac{\sum\limits_{j=n}^{\infty} \operatorname{Var}\xi_j}{\varepsilon^2}$$

és mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=n}^{\infty} \operatorname{Var}\xi_j = 0$, innen következik a (+) reláció.

A Kolmogorov-féle három sor tételnek itt csak az elégséges részét bizonyítom be, a feltételek szükségességének bizonyítását a kiegészítésben teszem meg. Ennek az az oka, hogy egyrészt alkalmazásokban az elégségesség a Tétel fontos része, másrészt a szükségesség tárgyalása az itteni tárgyalástól eltérő módszert igényel. Láttuk ugyanis, hogyan lehet független valószínűségi változók szőrásnégyzeteinek az ismeretében e változók összegeit megbecsülni. De, ha a független valószínűségi változók összegének a konvergenciájából a valószínűsési változók szórásnégyzeteinek összegére akarunk következtetni, akkor ez új gondolatokat igényel.

A Kolmogorov-féle három sor tétel elégséges részének bizonyítása. Azt akarjuk megmutatni, hogy amennyiben a független ξ_n valószínűségi változók teljesítik az (i), (ii) és (iii) feltételeket, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ valószínűségi változók egy valószínűséggel konvergensek. Az egy sor tétel bizonyításához hasonlóan látható, hogy elég belátni azt, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{m\geq n} \left|\sum_{k=n}^{m} \xi_k\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$P\left(\sup_{m\ge n}\left|\sum_{k=n}^{m}\xi_k\right|>\varepsilon\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}P(\xi_k\neq\xi_k')+P\left(\sup_{m\ge n}\left|\sum_{k=n}^{m}(\xi_k'-E\xi_k')\right|>\varepsilon-\sum_{k=n}^{m}\xi_k'\right)$$

továbbá $\sum\limits_{k=n}^{\infty}P(\xi_k\neq\xi_k')\to 0$ $n\to\infty$ esetén (i) miatt és $\sum\limits_{k=n}^{m}E\xi_k'<\dfrac{\varepsilon}{2}$ minden $m\ge n$-re ha $n>n(\varepsilon)$ (ii) miatt. Végül a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\sup_{m\ge n}\left|\sum_{k=n}^{m}(\xi_k'-E\xi_k')\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\le\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\operatorname{Var}\xi_k'}{\varepsilon^2}\to 0\quad\text{ha } n\to\infty.$$

a (iii) tulajdonság miatt. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik a tétel állítása.

Felidézem a nagy számok gyenge törvényéről szóló tételt annak általános, éles formájában. Ennek az eredménynek is csak az elégséges részét fogom itt bizonyítani, a szükségesség bizonyítását csak a Kiegészítésben adom meg. Egyébként érdemes megjegyezni, hogy ez a bizonyítás nagyon hasonló az előző órán tárgyalt első példához.

A nagy számok gyenge törvényét kimondó tétel éles alakja. *Legyen ξ_k, $k=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata F eloszlásfüggvénnyel. Ezek a valószínűségi változók akkor és csak akkor teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, azaz a $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ átlag akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan $n\to\infty$ esetében egy a számhoz, $-\infty<a<\infty$, ha*

$$\lim_{x\to\infty}x\,[F(-x)+(1-F(x))]=0,\quad \textit{és}\quad \lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u}xF(\,dx)=a.\qquad(++)$$

A nagy számok gyenge törvénye elégséges részének bizonyítása Tegyük fel, hogy a ξ_k valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásai teljesítik a (++) feltételt. Adott n-re definiáljuk a $\bar\xi_k=\bar\xi_k^{(n)}=\xi_kI(|\xi_k|\le n)$ és $\bar{\bar\xi}_k=\bar{\bar\xi}_k^{(n)}=\xi_k-\bar\xi_k$ valószínűségi változókat. Ekkor $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\bar\xi_k+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\bar\xi}_k$, ezért elegendő azt megmutatni, hogy $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\bar\xi_k\Rightarrow a$ és $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\bar\xi}_k\Rightarrow 0$, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. A bizonyítandó második reláció következik a (++) feltétel első részéből, mert $P\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\bar\xi}_k\neq 0\right)\le\sum\limits_{k=1}^{n}P(|\xi_k|\ge n)=n\,[F(-n)+(1-F(n))]\to 0$, ha $n\to\infty$. Az első reláció a Csebisev egyenlőtlenségből következik, mert minden $\varepsilon>0$ számra

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar\xi_k-a)\right|>\varepsilon\right)&\le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar\xi_k-E\bar\xi_k)\right|>(\varepsilon-|(a-E\bar\xi_1)|\right)\\&\le\frac{n\operatorname{Var}\bar\xi_1}{n^2\left(\varepsilon-|a-E\bar\xi_1|)^2\right)},\end{aligned}$$

$(\varepsilon - |a - E\bar{\xi}_1|)^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ezért a bizonyítás befejezéséhez elég azt megmutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{Var}\bar{\xi}_1^{(n)}}{n} = 0$. Mivel

$$\operatorname{Var}\bar{\xi}_1 \leq E\bar{\xi}_1^2 = \int_{-n}^{n} u^2 F(\,du) = \int_{-L}^{L} u^2 F(\,du) + \int_{L\leq|u|\leq n} u^2 F(\,du)$$

tetszőleges $L>0$ számra, az utolsó összeg első tagja rögzített L számra nem függ az n számtól, ezért elegendő azt megmutatni, hogy minden $\varepsilon>0$ számra létezik olyan $L=L(\varepsilon)$ szám, hogy $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_L^n u^2F(\,du) \leq \varepsilon$ és $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{-n}^{-L} u^2F(\,du) \leq \varepsilon$. A (++) formula első relációja miatt létezik olyan $L=L(\varepsilon)$ szám, melyre $x \geq L$ esetén $x(1-F(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ és $xF(-x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ezért parciális integrálással kapjuk, hogy ilyen L-re $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_L^n u^2F(\,du) = \dfrac{-1}{n}\displaystyle\int_L^n u^2\,(d(1-Fu)) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_L^n 2u(1-F(u))\,du - \dfrac{1}{n}\left[u^2(1-F(u)\right]_L^n \leq \dfrac{\varepsilon}{n}\displaystyle\int_L^n 1\,du \leq \varepsilon$. A másik egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható.

Természetesen felvetődik a következő kérdés: Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1=0$. Legyen $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $n=1,2,\dots$. Ekkor a nagy számok gyenge törvénye szerint a $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, a nagy számok erős törvénye szerint pedig egy valószínűséggel is nullához tartanak. Hogyan lehet élesíteni a nagy számok gyenge illetve erős törvényét? Pontosabban fogalmazva, milyen a_n, $n=1,2,\dots$ sorozatokra mondhatjuk, hogy $\dfrac{S_n}{a_n}$ sztochasztikusan tart nullához, ha $n\to\infty$? Milyen b_n, $n=1,2,\dots$ sorozatokra mondhatjuk, hogy $\dfrac{S_n}{b_n}$ egy valószínűséggel tart nullához, ha $n\to\infty$? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy olyan valószínűségi változókat tekintünk, melyeknek van második momentumuk.

Az első kérdésre a válasz viszonylag egyszerű következménye a centrális határeloszlástételnek, és ezt az állítást feladat formájában fogalmazom meg. A második kérdésre a választ nehezebb megadni. Ezt a választ azalábbi bizonyítás nélkül ismertetett iterált logaritmustétel adja meg.

Feladat:

Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ olyan független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1=0$ és $E\xi_1^2<\infty$. Legyen $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $n=1,2,\dots$. Ekkor pozitív valós számok valamely a_n sorozatára a $\dfrac{S_n}{a_n}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan nullához $n\to\infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\infty$.

Végül megfogalmazom a valószínűségszámítás egyik híres eredményét, az úgynevezett iterált logaritmus tételt

Iterált logaritmus tétel. *Legyenek $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyekre $E\xi_1(\omega) = 0$, $\operatorname{Var}\xi_1(\omega) = \sigma^2 < \infty$. Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = 1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre,}$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = -1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre.}$$

Kiegészítés:

A Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyítása: Definiáljuk a

$$\tau(\omega) = \min\{k\colon\ k \le n;\ |S_k(\omega)| \ge x\}$$

valószínűségi változót. ($\tau(\omega) = n$ ha $S_k(\omega) < x$ minden $k \le n$-re.) Azt állítjuk, hogy

$$ES^2_{\tau(\omega)} \le ES_n^2\,. \tag{a}$$

Az utolsó egyenlőtlenség és a Csebisev egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\max_{k\le n} |S_k| > x\right) = P\left(|S_{\tau(\omega)}| > x\right) \le \frac{ES^2_{\tau(\omega)}}{x^2} \le \frac{ES_n^2}{x^2}\,,$$

és ez a Kolmogorov egyenlőtlenség.

A kívánt egyenlőtlenség bebizonyításához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} ES_n^2 - ES^2_{\tau(\omega)} &= \sum_{k=1}^n E(S_n - S_k)(S_n - S_k + 2S_k) I(\{\tau(\omega) = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^n E(S_n - S_k)^2 I(\{\tau(\omega) = k\}) + 2\sum_{k=1}^n E(S_n - S_k) S_k I(\{\tau(\omega) = k\})\,. \end{aligned} \tag{b}$$

Mivel az $S_n - S_k$ és $S_k I(\{\tau(\omega) = k\})$ valószínűségi változók függetlenek, (az $S_n - S_k$ a ξ_l, $l = k+1, \dots, n$, az $S_k I(\{\tau(\omega) = k\})$ az ξ_l, $l = 1, \dots, k$ valószínűségi változóktól függ,) és $E(S_n - S_k) = 0$, ezért

$$E(S_n - S_k) S_k I(\{\tau(\omega) = k\}) = E(S_n - S_k) E S_k I(\{\tau(\omega) = k\}) = 0\,.$$

Innen következik, hogy az (b) azonosság jobboldalának a második tagja nulla. Mivel az első tag egy nem negatív valószínűségi változó várható értéke, ezért az (b) azonosságból következik az (a) reláció. Így bebizonyítottuk a Kolmogorov egyenlőtlenséget.

A három sor tétel szükséges felének bizonyítása. Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)$ összeg egy valószínűséggel konvergens, akkor a $|\xi_k(\omega)| > C$ esemény csak véges sok k indexre teljesül. Ezenkívül ezek az események különböző k indexre függetlenek, ezért, ha az alábbi sorozat konvergál, akkor a Borel–Cantelli lemma alapján $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k| > C) < \infty$, azaz az (i) tulajdonság teljesül. Továbbá a Borel-Cantelli lemma másik fele alapján a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\xi_k(\omega) - \xi'_k(\omega))$ így a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi'_k(\omega))$ összeg is egy valószínűséggel konvergens, ahol $\xi'_k(\omega) = \xi_k(\omega) I(|\xi_k(\omega)| < C)$. A bizonyítás következő lépésében egy más problémák megoldásában is hasznos módszert, az un. szimmetrizálást alkalmazzuk. Legyen ξ''_k független valószínűségi változók sorozata, melyek a ξ'_k sorozattól is függetlenek, és ξ''_k ugyanolyan eloszlású mint a ξ'_k valószínűségi változó. Legyen $\tilde{\xi}_k = \xi'_k - \xi''_k$. Ekkor $\tilde{\xi}_k$ független szimmetrikus, azaz olyan eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyekre $P(\tilde{\xi}_k > x) = P(\tilde{\xi}_k - < x)$ minden x számra, és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ sorozat egy valószínűséggel konvergens. Be fogjuk látni az alábbi lemmát.

Lemma. *Ha $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független szimmetrikus eloszlású, korlátos valószínűségi változók, azaz olyanok, melyekhez létezik olyan $K > 0$ szám, hogy $P(|\xi_k| \le K)$ minden $k = 1, 2, \dots$ indexre, és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)$ összegek egy valószínűséggel konvergálnak, akkor $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \xi_k < \infty$.*

Először megmutatjuk az állítás bizonyítását e Lemma segítségével. E lemma alapján tudjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \tilde{\xi}_k < \infty$, és mivel $\operatorname{Var} \tilde{\xi}_k = 2 \operatorname{Var} \xi'_k$ innen következik a (iii) tulajdonság. A $\xi'_k - E\xi'_k$ sorozat teljesíti a három sor tétel mindhárom feltételét. Ezért e tételnek a már bizonyított elégséges felét felhasználva azt kapjuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\xi'_k - E\xi'_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E\xi'_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi'_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\xi'_k - E\xi'_k)$ összegek konvergensek egy valószínűséggel. Ezért a (ii) tulajdonság is teljesül.

A lemma bizonyítása. Jelölje a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(x)$, és karakterisztikus függvényét $\varphi_k(t)$. Először azt mutatjuk meg, hogy elég kis t indexre a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \varphi_k(t)$ reláció teljesül, sőt a tekintett összeg abszolult konvergens. Valóban a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega)$ egy valószínűséggel való konvergenciájából következik, hogy e véletlen összegek eloszlásban is konvergálnak, ezért a $\prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(t)$ függvények konvergálnak egy folytonos $\varphi(t)$ függvényhez. A $\varphi_k(t)$ karakterisztikus függvények a ξ_k valószínűségi változók szimmetrikus eloszlása miatt valós értékűek, 1-nél kisebbek, és logaritmust véve kapjuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log\varphi(t)$ abszolut konvergens kis t számra, és az összeg kisebb, mint ε. (Azt használjuk itt ki, hogy a $\varphi(t)$ határfüggvény a nullában folytonos, és $\varphi(0) = 1$. Tekintve a $\log(1+x)$ függvény Taylor sorát nulla kis környezetében $x = 1 - \varphi_k(t)$ választással kapjuk, hogy $1 - \varphi_k(t) \le -2\log\varphi(t)$ elég kis t-re minden k indexre, és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} [1 - \varphi_k(t)) < \infty$, amint állítottuk.

Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyikre $P(|\xi| \le K) = 1$, és jelölje $\varphi(t)$ ξ karakterisztikus $F(x)$ az eloszlás függvényét. Azt állítjuk, hogy ha $t > 0$ olyan szám, melyre $tK \le 1$, akkor $\frac{t^2}{4}\operatorname{Var}\xi \le \operatorname{Re}\operatorname{Var}\varphi(t)$. Valóban ekkor

$$\operatorname{Re}\,(1-\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos tx)F(\,dx) \ge \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2x^2}{4}F(\,dx) = \frac{t^2}{4}E\xi^2 \ge \frac{t^2}{4}\operatorname{Var}\xi,$$

mivel $|tx| \le |tK| \le 1$ esetén $1 - \cos tx > \dfrac{(tx)^2}{4}$.

A fenti két állításból következik, hogy esetünkben $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var}\xi_k \le \dfrac{4}{t}\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-\varphi(t)) < \infty$ egy elég kis $t > 0$ számmal.

A gyenge konvergenciáról szóló tétel szükséges felének a bizonyítása. Ennek az állításnak a bizonyítását kevésbé részletesen írom le. Az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy a limesz $a = 0$, mert az általános eset erre visszavezethető, ha az eredményt a $\bar{\xi}_k = \xi_k - a$ valószínűségi változókra alkalmazzuk. Először azt mutatjuk meg, hogy abból, hogy a xi_k független, egyforma valószínűségi változók átlagai sztochasztikusan konvergálnak nullához következik, hogy e valószínűségi változók $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényei a nullában deriválhatóak, és deriváltjuk nullával egyenlő. (Valójában a két állítás ekvivalens egymással.)

Valóban, az, hogy ezek az átlagok sztochasztikusan konvergálnak nullához, ekvivalens azzal, hogy eloszlásban konvergálnak nullához, ami a karakterisztikus függvények nyelvén azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \to 1$, és ez a konvergencia minden véges intervallumban egyenletes. Logaritmust véve azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n\log\varphi\left(\frac{t}{n}\right) = 1$ minden valós t számra, és a konvergencia egyenletes. Véve a $\log(1+z) = 1 - z + O(z^2)$ közelítést $z = \log\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - 1$ választással azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - 1\right) = 0$, és a becslés egyenletes minden véges intervallumon. Innen következik, hogy a karakterisztikus függvény nullában konvergens, és a deriváltja nulla.

Abból, hogy a derivált (valós része) nulla, következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra

$|\mathrm{Re}\,[1-\varphi(u)]| < \frac{\varepsilon}{x}$, ha $u < \dfrac{1}{x}$ és $x > x(\varepsilon)$. Ezért elég nagy x-re

$$\begin{aligned}
\varepsilon > x^2 \int_0^{1/x} \mathrm{Re}\,[1-\varphi(u)]\,du &= \int_0^{1/x} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(1-\cos ut)F(d\,u)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{1/x} x^2(1-\cos ut)\,dtF(d\,u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{x^2 \sin \frac{u}{x}}{u}\right) F(\,du) \\
&\geq \frac{x}{2} \int_{\{|t|>2x\}} F(\,du) = \frac{x}{2} \left[(1-F(2x)) + F(-2x)\right].
\end{aligned}$$

Innen következik, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} x[(1-F(x)+F(-x)] = 0$.

Viszont, ha ellenőrizzük a tétel elégségesség részének a bizonyítását, akkor láthatjuk, hogy ott elsősorban ezt a feltételt használtuk, és ez a feltétel önmagában elegendő annak a bizonyításához, hogy a $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\xi_k - \int -n^n uF(\,du)\right)$ valószínűségi változók nullához konvergáljanak. Ez viszont azt jelenti, hogy az átlagok csak akkor konvergálhatnak egy a számhoz, ha $a = \lim\limits_{n\to\infty} \int -n^n uF(\,du)$, és ezt kellett belátni.