A Valószínűségszámítás II. előadássorozat harmadik előadása.

2002. szeptember 24.

Határoszlástételek vizsgálata.

A valószínűségszámítás talán legfontosabb eredménye a független valószínűségi változók normálizált összegének aszimptotikus eloszlását leíró centrális határeloszlástétel, melynek alábbi nem teljesen általános, de fontos speciális esetét tárgyaltuk a bevezető valószínűségszámítás előadáson is.

Centrális határeloszlástétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, jelölje $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, $n = 1, 2, \dots,$ e valószínűségi változók részletösszegeit. Ekkor az S_n valószínűségi változók $\dfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j - \sum\limits_{j=1}^{n} E\xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{Var} \xi_j}}$ normalizáltjai teljesítik a*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} < x\right) = \Phi(x), \quad \textit{minden } -\infty < x < \infty \textit{ számra}$$

relációt, ahol $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$, a standard normális eloszásfüggvény.

Ahhoz, hogy lássuk, a fent megfogalmazott tétel értelmes tudnunk kell, hogy a benne szereplő standard normális eloszlásfüggvény valóban eloszlásfüggvény. Ezt mondja ki az alábbi lemma:

Lemma.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 1.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$ jelölést. Ekkor a Fubini tétel szerint

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\, du\, dv$$

ahonnan

$$I^2 = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2}\, dr\, d\varphi = \int_{0}^{\infty} r e^{-r^2/2}\, dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 1.$$

Ebben a számolásban az I^2 mennyiséget kifejező az (u, v) térben megadott kettős integrált kifejeztük az (r, φ) polárkoordinátarendszerben az $u = r\cos\varphi$, és $v = r\sin\varphi$

helyettesítés segítségével, mint az $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, tartományon felírt integrált. Ezen számolás során felhasználjuk, hogy a polárkkoordináta rendszerbe való áttérést leíró transzformáció Jacobianja r, azaz formálisan $du\,dv = r\,dr\,d\varphi$. Ezért jelenik meg egy r szorzó az integrálban a polárkoordinátarendszerbe való áttéréskor. Ha lesz rá idő és igény e képlet szemléletes tartalmát később elmagyarázom.

A fent kimondott centrális határeloszlástételhez hasonló eredmény érvényes független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált összegére nagyon általános esetben. A mostani és az ezt követő néhány előadásban ezt az eredményt fogjuk részletesen tárgyalni. Megfogalmazzuk a pontos eredményt, és megbeszéljük annak bizonyítását, illetve a bizonyítás néhány más matematikai területen is hasznos gondolatát. Ahhoz, hogy ezt megtegyük először tárgyalnunk kell eloszlásfüggvények konvergenciájának a fogalmát. Először felidézzük ennek definicióját és legfontosabb tulajdonságait.

Eloszlásban való konvergencia definiciója. *Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata a számegyenesen. Azt mondjuk, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ az $F(\cdot)$ (határ)eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában.*

Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha az $F_n(x) = P(\xi_n < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez.

Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $F_n(x) = P(\xi_n < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$ eloszlásfüggvényhez.

Felmerülhet a kérdés, miért van kitüntetett szerepe a határeloszlásfüggvény szakadási pontjainak az eloszlásfüggvény konvergenciájának definiciójában. Természetes-e, hogy ezekben a pontokban nem követeltük meg a konvergenciát? E kérdés megértésének érdekében tegyük a következő megjegyzést.

Mint azt a korábbi előadásokon megbeszéltük, és elfogadtuk (bizonyítás nélkül) egy a számegegyenesen megadott F eloszlásfüggvény indukál egy valószínűségi mértéket, az úgynevezett Lebesgue–Stieltjes mértéket a számegyenes szép (Borel–mérhető) részhalmazain. Ezt a mértéket μ_F-fel fogjuk a továbbiakban jelölni, és az F eloszlásfüggvény által meghatározott eloszlásnak fogjuk nevezni. Ez a μ_F Lebesgue-Stieltjes mérték az az (egyértelműen meghatárott) valószínűségi mérték a számegyenes Borel–mérhető részhalmazainak σ-algebráján, melyre teljesül az, hogy $\mu_F((-\infty, x)) = F(x)$ minden x valós számra. Bár eloszlásfüggvények konvergenciájáról beszélünk, valójában az eloszlásfüggvények által meghatározott eloszlások konvergenciáját fogjuk vizsgálni. Ha adva van F_n eloszlásfüggvények egy sorozata, akkor a hozzájuk tartozó eloszlások, azaz μ_{F_n} Lebesgue–Stieltjes úgy mértékek képzelhetőek el szemléletesen, mint olyan tömegeloszlások a számegyenesen, melyekben egy $A \subset R$ (Borel–mérhető) halmaz „súlya” a

$\mu_{F_n}(A)$ mérték. Az F_n eloszlásfüggvények konvergenciája egy F eloszlásfüggvényhez azt jelenti, hogy a μ_{F_n} tömegeloszlások nagy n indexre közel vannak a μ_F tömegeloszláshoz.

Az eloszlásban való konvergencia jobb megértése érdekében tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen $x_0 = 0$, és x_n, $n = 1, 2, \dots$, olyan számsorozat, melyre $x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Legyen μ_{F_n}, $n = 0, 1, 2, \dots$, az a mérték, mely az x_n pontba van koncentrálva, azaz $\mu_{F_n}(\{x_n\}) = 1$, részletesebben $\mu_{F_n}(A) = 1$, ha $x_n \in A$, és $\mu_{F_n}(A) = 0$, ha $x_n \notin A$. A μ_{F_n} eloszlás azon F_n eloszlásfüggvény által meghatározott Lebesgue–Stieltjes mérték, melyre $F_n(x) = 0$, ha $x \le x_n$, $F_n(x) = 1$, ha $x > x_n$. Természetes azt várni, hogy az eloszlásfüggvény alkalmas definiciója esetén a most definiált példában az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz. Másrészt vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ minden $x \ne 0$ számra. De az $x = 0$ pontban, azaz az F_0 függvény szakadási pontjában ez a konvergencia nem teljesül, mert $F_n(0) = 1$, ha $n \ge 1$, és $F_0(0) = 0$. Tehát az általunk megadott definició szerint az F_n eloszlások eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz, de annak érdekében, hogy ez teljesüljön szükség volt arra, hogy az eloszlásban való konvergencia definiciójában nem követeljük meg az eloszlásfüggvények konvergenciáját a határfüggvény szakadási pontjaiban.

Be lehet látni, hogy az eloszlásban való konvergencia kifejezi azt a szemléletes tartalmat, melyet a tömegeloszlásokkal való reprezentáció sugall, ezt azonban nem tesszük. Ehelyett egy olyan eredményt fogalmazok meg, az eloszlásban való konvergencia egy ekvivalens jellemzését adja meg. Ennek az eredménynek a bizonyítását csak a kiegészítésben adom meg. Bár gyakorlati alkalmazásokban általában az eloszlásfüggvények konvergenciájának eredeti definicióját használjuk, határeloszlástételek bizonyításában célszerűbb az eloszlásban való konvergenciának az alábbi 1. Tételben megfogalmazott jellemzését használni.

1. Tétel. *$F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty} \int g(u)\,dF_n(u) = \int g(u)\,dF(u) \tag{a}$$

azonosság.

Természetes az a gondolat, hogy az eloszlásban való konvergenciának az 1. Tételben leírt jellemzését használjuk fel, de próbáljuk meg az (a) formulában megfogalmazott feltételt redukálni a folytonos és korlátos függvények egy kisebb és jobban kezelhető osztályára, és abból következtetni az eloszlásban való konvergenciára. Érdemes ezt a redukciót az $f_t(x) = e^{itx}$ (komplex) értékű függvényeket tekinteni, ahol, $-\infty < t < \infty$, paramétere ennek a függvénycsaládnak, és definiálni egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény vagy egy $F(\cdot)$ eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényét az alábbi módon belátni.

Eloszlásfüggvények és valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a definiciója. *Legyen adva egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény. Ennek karakterisztikus függvényét* *az*

$$\varphi(t)=\varphi_F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}F(\,du), \quad -\infty<t<\infty,$$

képlettel definiáljuk. Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u)=P(\xi<u)$, $-\infty<u<\infty$, e valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a

$$\varphi(t)=Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}F(\,du), \quad -\infty<t<\infty,$$

függvény. (Mivel egy valószínűségi változó karakterisztikus függvénye csak annak eloszlásfüggvényétől függ, ezért jogunk van adott eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényéről beszélni.)

Mint látni fogjuk, eloszlásfüggvények konvergenciáját jól lehet vizsgálni a karakterisztius függvények segítségével. A karakterisztikus függvények definiciójában megjelenő $f_t(x)=e^{itx}$ függvények az úgynevezett trigonometrikus függvények, és a későbbi vizsgálatokban megjelenő módszerek és eredmények a Fourier analízis témakörébe tartozik. Jegyezzük meg azt is, hogy a továbbiakban komplex értékű függvényekkel is dolgozunk. Ezért a későbbi eredmények teljes bizonyítása érdekében ellenőrizni kell, hogy az előző előadásokban szereplő eredmények független valószínűségi változókra nemcsak valós, hanem komplex értékű valószínűségi változókra is érvényesek. Ez csak technikai jellegű és nem valódi nehézség, mert a későbbiekben felhasznált állítások bizonyítása komplex értékű valószínűségi változók esetében semmilyen plusz nehézséget nem okoz.

Ez utóbbi megjegyzést kissé részletesebben is kifejtjük. Először azt kell tisztáznunk, hogy mit jelent a komplex értékű valószínűségi változó. Ez olyan mérhető függvény egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, mely értékeit a komplex számsíkon veszi fel. Az, hogy a $\xi(\omega)=\eta_1(\omega)+i\eta_2(\omega)$ valószínűségi változó mérhető az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, azt jelenti, hogy minden $z=x+iy$ komplex számra $\{\omega\colon \eta_1(\omega)<x, \eta_2(\omega)<y\}\in\mathcal{A}$. Nem nehéz látni, hogy a fenti jelölésekkel a $\xi(\omega)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor mérhető, ha az $(\eta_1(\omega),\eta_2(\omega))$ valós értékű véletlen vektor mérhető. Ha adva vannak valamilyen $\xi^{(1)}=\eta_1^{(1)}+i\eta_2^{(1)}$, … $\xi^{(n)}=\eta_1^{(n)}+i\eta_2^{(n)}$ komplex értékű valószínűségi változók egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, akkor ezek akkor függetlennek, ha az $\left(\eta_1^{(1)},\eta_2^{(1)}\right)$, … $\left(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)}\right)$ (két-dimenziós) valószínűségi vektorok függetlenek. Jegyezzük meg, hogy a Fubini–tétel érvényes nemcsak valós, hanem komplex értékű függvényekre is. Ezért a valós értékű független valószínűségi változókra vonatkozó tételek (melyek a Fubini tétel következményeinek is tekinthetőek) érvényesek komplex értékű valószínűségi változókra is.

Speciálisan igaz, hogy amennyiben $\xi_1,\dots,\xi_n$ független komplex értékű valószínűségi változók, akkor rájuk is érvényes az alábbi független valószínűségi változók szorzatára vonatkozó fontos azonosság:

$$E\xi_1\cdots\xi_n=E\xi_1\cdots E\xi_n.$$

Továbbá, amennyiben $f_1(z), \dots, f_n(z)$ komplex értékű (mérhető) függvények, akkor az $f_1(\xi_1), \dots, f_n(\xi_n)$ valószínűségi változók is mérhetőek. Az előbbi összefüggéseknek, illetve a trigonometrikus függvényekre érvényes $e^{i(u_1+u_2)} = e^{iu_1}e^{iu_2}$ azonosságnak következménye az alábbi egyszerű, de fontos azonosság.

Lemma valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, jelölje $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ e valószínűségi változók összegét és $\varphi_j(t)$, $1 \le j \le n$, a ξ_j valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az S_n összeg karakterisztikus függvénye a $\psi_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(t)$, $-\infty < t < \infty$ függvény. Ha A és $B \neq 0$ valós számok, akkor a $\dfrac{S_n - A}{B}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az*

$$Ee^{it(S_n-A)/B} = e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac{t}{B}\right) = e^{-itA/B}\prod_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{t}{B}\right)$$

függvény.

Bizonyítás:

$$Ee^{itS_n} = E^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = Ee^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\cdots e^{it\xi_n} = Ee^{it\xi_1}Ee^{it\xi_2}\cdots Ee^{it\xi_n} = \prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)$$

a ξ_j, $1 \le j \le n$, függetlensége miatt illetve az $e^{it\xi_j}$ valószínűségi változók ebből következő függetlensége miatt. Ezenkívül

$$Ee^{it(S_n-A)/B} = Ee^{i(t/B)S_n}e^{-itA/B} = e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac{t}{B}\right),$$

ha az S_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\psi_n(t)$. Innen következik a Lemma állítása.

A fenti lemma szerint független valószínűségi valószínűségi változók karakterisztikus függvényének ismeretében egyszerű módon ki tudjuk fejezni normalizált összegük karakterisztikus függvényét. Ez azt sugallja, hogy ha eloszlásfüggvények konvergenciáját jellemezni tudjuk az eloszlásfüggvények segítségével, akkor a karakterisztikus függvények vizsgálata lehetővé teszi a centrális határeloszlástétel bizonyítását. Az elkövetkezőekben megmutatjuk, hogy ez a program végrehajtható. Ezelőtt azonban mutatunk egy önmagában is érdekes példát, amelyik egyben megmutatja a felhasználandó bizonyítási módszert. Nevezetesen, megmutatjuk, hogyan lehet a Fourier analízis vagy ha úgy tetszik a karakterisztikus függvény módszer segítségével bebizonyítani az analízis egyik híres eredményét, az úgynevezett Stirling formulát, mely az $n!$ kifejezésre ad jó közelítő formulát.

Jegyezzük meg, hogy amennyiben olyan ξ valószínűségi változót tekintünk, amelyik csak egész értékekt vesz fel, és $P(\xi = n) = p_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n = 1$, akkor a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{int}, \qquad -\infty < t < \infty$$

ami a p_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ együtthatókkal készített Fourier sor, ezért ennek együtthatói a

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(t)\, dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{$*$}$$

képlet segítségével fejezhetőek ki. Ezt a formulát a n paraméterű Poisson eloszlásra, konkrétabban annak valószínűségére alkalmazva, hogy egy ilyen valószínűségi változó az n értéket veszi fel belátjuk az alábbi Stirling formulának nevezett eredményt.

Stirling formula:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

azaz az első n egész szám szorzata $n!$ teljesíti az alábbi relációt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1.$$

A Stirling formula bizonyítása: Először azt mutatjuk meg, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt}. \tag{b}$$

Tekintsünk egy ξ Poisson eloszlású valószínűségi változót $\lambda = n$ paraméterrel, azaz legyen $P(\xi = k) = \frac{n^k}{k!} e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Szám1tsuk ki a ξ valószínűségi változó $P(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvényét. Ez a következő $P_n(t)$ Fourier sor:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} e^{-n+ikt} = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^{it})^k}{k!} = e^{-n+ne^{it}}.$$

Innen, illetve egy Fourier sor együtthatóinak kifejezéséből a Fourier sor segiítségével $k = n$ választással kapjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} P_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int-n+ne^{it}}\, dt.$$

Ez a képlet ekvivalens a (b) formulával.

A (b) formula alapján a Stirling formula bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt = 1,$$

amit úgyis írhatunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\, dt} = 1.$$

Viszont tekintve az e^{it} függvény Taylor sorát kapjuk, hogy

$$n(e^{it}-1-it) = -n\left(\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^3\right) = -\frac{nt^2}{2} + \beta(t)n^{-1/8},$$

alkalmas $|\alpha(t)| \le \text{const.}$ és $|\beta(t)| \le \text{const.}$ együtthatókkal, ha $|t| \le n^{-3/8}$, ahonnan $e^{n(e^{it}-1-it)} = e^{-nt^2/2} e^{\beta(t)n^{-1/8}} = e^{-nt^2/2}\left(1+\gamma(t)n^{-1/8}\right)$, $\gamma(t) \le \text{const.}$, ha $t \le n^{-3/8}$, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt}{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\, dt} = 1.$$

Továbbá nem nehéz belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\, dt} = \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{n^{1/8}}^{n^{1/8}} e^{-t^2/2}\, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2\displaystyle\int_{n^{1/8}}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt}{\sqrt{2\pi}} = 1,$$

ezért elég megmutatni, hogy az $\displaystyle\int_{-\pi}^{-n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt$ és $\displaystyle\int_{n^{-3/8}}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\, dt$ integrálok elég kicsik, pontosabban ezek az integrálok $\sqrt{n}$-nel megszorozva is nullához tartanak. (Ez a feltétel azért jelenik meg ebben a formában, mert $\sqrt{n}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$. Ennek bizonyításához jegyezzük meg, hogy $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ tetszőleges z komplex számra, ahol $\operatorname{Re} z$ a z szám valós részét jelöli. Innen

$$|e^{n(e^{it}-1-it)}| = e^{n(\cos t-1)} \le e^{-\text{const.}\, n^{1/4}},$$

ha $n^{3/8} \le |t| \le \pi$, ahonnan következik a kívánt becslés.

Megjegyzem, hogy a fenti bizonyítás hátterében a következő észrevétel van. Ha tekintünk n független 1 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változót, akkor ezek összege n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Annak valószínűségére, hogy n független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege egy adott értéket vesz fel jól tudjuk becsülni, mert ki tudjuk fejezni először az összeg karakterisztikus függvényét, és ezután a Fourier sorok együtthatóját a Fourier sor segítségével kifejező $(*)$ formula lehetővé teszi a keresett valószínűségek kiszámolását is. Ennek az eredménynek érvényes egy általánosítása, melyet röviden ismertetek az később kimondandó Tétel B-ben, de a bizonyításnak csak a vázlatát adom meg. Ebben az eredményben jó aszimptotikus becslést fogalmazunk meg annak valószínűségére, hogy független egyforma eloszlású egész értékű valószínűségi változók összege egy konkrét értéket vesz fel. A bizonyítás eszméje azon alapul, hogy a Stirling formulára adott bizonyításhoz hasonlóan jó aszimptotikus formulát lehet adni az összeg karakterisztikus függvényére ebben az általánosabb esetben is, és ezután a $(*)$ azonosság segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklő valószínűségekre is. Ehhez azonban szükségünk van bizonyos eredményekre a karakterisztikus függvény viselkedéséről. Ezeket az alábbi két eredményben fogalmazom meg.

Először az alábbi eredményt mondjuk ki, melynek bizonyításában felhasználjuk a komplex függvénytan egyik alapvető eredményét.

Tétel a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről. *A $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvénnyel rendelkező standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye a $g(t) = e^{-t^2/2}$ függvény, azaz*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = e^{-t^2/2}.$$

Magyarázat:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-it)^2/2} e^{-t^2/2}\, du \\ &= e^{-t^2/2} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{-t^2/2}\, du.\end{aligned}$$

A fenti számolásban a szokásos technikát alkalmaztuk, az exponensben szereplő kvadratikus alakot teljes négyzetté alakítotuk át. Azt állítom, hogy

$$\int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{-t^2/2}\, du = 1.$$

Ez az integrál abban különbözik a standard normális sűrűségfüggvény integráljától, hogy a normális sűrűségfüggvény integrálját nem a valós tengelyen, hanem egy vele párhuzamos egyenesen tekintjük. Azt állítom, hogy ez az integrál ugyanannyi, mintha a valós tengelyen intergáltunk volna. Ezt nem nehéz belátni, ha szabad hivatkozni a komplex függvénytan talán legfontosabb eredményére, mely szerint egy analitikus függvény körintegrálja egy zárt görbén nulla. Azt kell kihasználni, hogy a $g(x) = e^{-z^2/2}$ függvény analitikus az egész számsíkon, és, ezenkívül a $g(z)$ függvény olyan, hogy amennyiben a z argumentum imaginárius részének az abszolut értéke kisebb mint valamely fix K szám reális részének az abszolut értéke pedig nagyon nagy, akkor a $g(z)$ függvény nagyon kicsi. Mivel ez a bizonyítás a komplex függvénytani ismeretek felhasználása segítségével egyszerűen végrehajtható, viszont ez a komplex függvénytani rész, melyet nem tanult mindenki elengedhetetlen a bizonyításban, ezért a részletek kidolgozását elhagyom.

Következmény: *Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor ξ karakterisztikus függvénye*

$$Ee^{it\xi} = e^{itm-\sigma^2t^2/2}.$$

Bizonyítás: A ξ valószínűségi változót $\xi = \sigma\eta + m$ alakban írhatjuk fel, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó. (Az η valószínűségi változót az $\eta = \dfrac{\xi - m}{\sigma}$ képlettel definiájuk. Ekkor η valóban nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű valószínűségi változó, és az hogy normális eloszlású tulajdonképpen azért igaz, mert ez jelenti tulajdonképpen azt, hogy ξ normális eloszlású.) Innen viszont következik, hogy

$$Ee^{it\xi} = Ee^{it(\sigma\eta+m)} = Ee^{i(t\sigma)\eta}e^{itm} = e^{itm-\sigma^2t^2/2},$$

és ezt kellett megmutatni.

Lemma C. *Legyen ξ olyan valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel, melyre teljesül az $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k F(\,du) < \infty$ egyenlőtlenség valamilyen k pozitív egész számra. Ekkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényének a deriváltjai megadhatók a $\dfrac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$ képlettel minden $0 \le j \le k$ és $-\infty < t < \infty$ számra. Speciálisan, $t = 0$ választással $\left.\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j F(\,du) = i^j E\xi^j$ minden $0 \le j \le k$ számra.*

Bizonyításvázlat. A Lemma C. bizonyítása érdekében írjuk fel a

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(\,du)$$

azonosságot, és differenciáljuk j, $j \le k$, alkalommal. Be lehet látni, hogy az $E|\xi|^k < \infty$ feltétel teljesülése esetén az azonosság jobboldalán az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető. (Ennek a valójában nem nehéz, de meglehetősen technikai rész bizonyításának elhagyása miatt beszélek csak bizonyításvázlatról bizonyítás helyett. A teljes bizonyításhoz tárgyalni kellene néhány olyan ebben az előadásban csak futólag említett eredményt a mértékelméletből, mint például a Lebesgue tétel. A teljes bizonyítást megadom a kiegészítésben.) Innen kapjuk, hogy

$$\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du).$$

Alkalmazva a $t = 0$ helyettesűtést megkapjuk a Lemma második állításának bizonyítását is.

Rátérek a Tétel B megfogalmazására. Előtte azonban bevezetjük az alábbi definiciót:

Egy rácsszélességű egész értékeket felvevő eloszlás definiciója. *legyen ξ egy csak egész értékeket felvevő ξ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy e valószínűségi változó eloszlása egy rácsszélességű, ha nincsenek olyan $A \ge 2$ és B egész számok, melyekre* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi = nA + B) = 1$.

Tétel B. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, egyforma eloszlású egész értekeket felvevő valószínűségi változók, melyek eloszlása egy rácsszélességű. Tegyük továbbá fel, hogy $E\xi_1^2 < \infty$, és legyen $E\xi_1 = m$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \sigma^2$. Ekkor az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ véletlen összegek eloszlásai teljesítik az*

$$P(S_n = l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left\{-\frac{(l-nm)^2}{2n\sigma^2}\right\} + \varepsilon_n(l), \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

relációt, ahol az $\varepsilon_n(l)$ hibatag teljesíti a $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{-\infty<l<\infty} \frac{\varepsilon_n(l)}{\sqrt{n}} = 0$ *becslést.*

Könnyű megérteni, hogy miért kell feltennünk a Tétel B megfogalmazásában azt, hogy 1 rácsszélességű valószínűségi változókat tekintünk. Hiszen, ha például olyan ξ_k valószínűségi változókkal foglalkozunk, melyek csak páros értékeket vesznek fel, akkor az S_n összegekre is öröklődik ez a tulajdonság. Érdemes megérteni, hogyan tudjuk felhasználni azt a bizonyításban, hogy a tekintett valószínűségi változók eloszlásának a rácsszélessége 1. Bizonyítás nélkül közlöm (bár a bizonyítás nem túl nehéz), hogy ha a ξ_j valószínűségi változók rácsszélessége 1, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy a ξ_j valószínűségi változók $\varphi(t) = Ee^{it\xi_j}$ karakterisztikus függvénye teljesíti a $\sup\limits_{t:\ \varepsilon\le|t|\le\pi} |\varphi(t)| < 1 - \delta(\varepsilon)$.

Ez az összefüggés azt biztosítja, hogy a $\varphi^n(t)$ függvény exponenciálisan kicsi, ha a $[-\pi, \pi)$ intervallumból kihagyjuk az origó egy kis környezetét, és a függvényt csak a maradék részben tekintjük. Ezért a $P(S_n = l)$ valószínűségre a következő becslés írhatjuk a $(*)$ formula segítségével:

$$P(S_n = l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ilt}\varphi_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ilt}\varphi_n(t)\,dt + \text{elhanyagolható hiba},$$

ahol $\varphi(\cdot)$ a ξ_j összeadandók karakterisztikus függvénye, és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kis pozitív szám. Ez azt jelenti, hogy számunkra elegendő $\varphi(t)^n$ függvényre csak kis t számokra jó becslést adni. Ezt adja meg a következő becslés, melynek szintén nem dolgozom ki a részleteit. Ez azon alapul, hogy ki tudjuk fejezni a karakterisztikus függvény deriváltjait a nullában a momentumok segítségével. Ezért a Taylor sorfejtés jó becslést nyújt a karakterisztikus függvény értékére a nulla kis környezetében.

Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E\xi_1^2 < \infty$, és vezessük be az $E\xi_1 = m$, $\sigma_2 = \operatorname{Var}\xi_1$ jelöléseket. Legyen továbbá $S_n = \sum\limits_{k=1} \xi_k$. Ekkor $Ee^{itS_n} = \varphi(t)^n$, $Ee^{it(S_n-nm)} = (Ee^{it(\xi_1-m)})^n$, ezért kis t értékekre azt várhatjuk a Lemma B és a Taylor formula alapján, hogy $Ee^{it(\xi_1-m)} \sim 1-\sigma^2\dfrac{t^2}{2}$, és

$$
\begin{aligned}
Ee^{itS_n} &= e^{itnm}Ee^{it(S_n-nm)} = \left(e^{itm}Ee^{it(\xi_1-m)}\right)^n \\
&\sim \left(e^{itm}\left(1-\sigma^2\frac{t^2}{2}\right)\right)^n \sim e^{in(tm-\sigma^2t^2/2)}.
\end{aligned}
$$

Ez a becslés és az előző számolás azt sugallja, hogy

$$
P(S_n = l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-ilt}e^{in(tm-\sigma^2t^2/2)}\,dt + \text{elhanyagolható hiba}
$$

tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ számmal. Továbbá, mivel az $e^{-ilt}e^{in(tm-\sigma^2t^2/2)}$ függvény a nullán kivül nagyon gyorsan csökken ezért természetes azt várni, hogy

$$
\begin{aligned}
P(S_n = l) &\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ilt}e^{in(tm-\sigma^2t^2/2)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\sigma^2/2(t-i(m/\sigma^2+l/n\sigma^2)^2}e^{-(l-nm)^2/2n\sigma^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}}\exp\left\{-\frac{(l-nm)^2}{2n\sigma^2}\right\}
\end{aligned}
$$

és ennek az aszimptotikus formulának a helyességét be is lehet látni részletesebb, figyelmes számolással. A részletek alapos kidolgozásával be lehet bizonyítani a Tétel B-t.

A Stirling formula bizonyításában tulajdonképpen a fent vázolt bizonyítást hajtottuk végre akkor, ha speciálisan Poisson eloszlású valószínűségi változókat tekintünk. Igaz, hogy ott csak az $l = n$ esetet tekintettük, mert csak az érdekelt minket. A Tétel B-ben minden l egész számra adtunk egy becslést a $P(S_n = l)$ valószínűségre, de ez csak akkor tartalmas, ha az l szám viszonylag közel van az S_n szám $ES_n = nm$ várható értékéhez. Ugyanis abban az esetben, ha nem tudjuk, hogy a becslő függvény fő tagja nagyobb, mint a becslésben szereplő hibatag, akkor ez a becslés viszonylag kis értékű. Ez a helyzet, ha olyan l_n, $n = 1, 2, \dots,$ számsorozatra próbálom alkalmazni a becslést, melyre $\dfrac{l_n - nm}{\sqrt{n}} \to \infty$.

Hasonlítsuk össze a Tétel B eredményét az előadás elején megfogalmazott centrális határeloszástétellel. A Tétel B-ben csak rácsos eloszlású valószínűségi változókat vizsgáltunk, és az eredmény azt állítja, hogy (néhány enyhe megszorító feltevés teljesülése esetén) annak valószínűsége, hogy a független valószínűségi változók összege egy adott k értéket vesz fel, jól közelíthető a standard normális sűrűségfüggvénnyel. (Az approximáló normális sűrűségfüggvény olyan volt, hogy várható értéke és szórásnégyzete megegyezett a vizsgált összeg várható értékével és szórásnégyzetével.) A centrális határeloszlástétel a véletlen összeg eloszlására ad jó becslést. Hogyan viszonylik ez a két eredmény egymáshoz? Nem nehéz belátni azt, hogy ha teljesülnek a Tétel B feltételei, akkor (ennek az eredménynek a jelölését használva) ebből az eredményből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

minden $-\infty < a < b < \infty$ számra. Némi további meggondolásból az is következik, hogy ebben az esetben teljesül a centrális határeloszlástétel is. (Ennek részleteit nem dolgozom ki, és nem is fogom kérdezni a vizsgán, de az érdeklődő hallgatók maguk is bebizonyíthatják. Azt kell észrevenni, hogy a fenti formulából következik az is, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ valós szám, melyre igaz, hogy

$$P(S_n > K) + P(S_n < -K) \le \varepsilon \quad \text{minden } n \text{ indexre.}$$

Ez az észrevétel teszi lehetővé, hogy az előző formulában végrehajtsuk az $a \to -\infty$ határátmenetet.

Az állítás megfordítása nem igaz. Abból, hogy valószínűségi változók eloszlásfüggvényei konvergálnak a normális eloszláshoz nem következik, hogy annak valószínűsége, hogy ezek konkrét értéket vesznek fel konvergál ahhoz a sűrűségfüggvényhez, melyet ez az eredmény sugall. Ez akkor sem igaz, ha például tudjuk, hogy a vizsgált valószínűségi változók csak egész értékeket vesznek fel. (Nem megyek bele a részletek tárgyalásába, ezt az érdeklődő diákok maguk is megtehetik. Csak megjegyzem, hogy ez azzal a ténnyel van (nemcsak) formális kapcsolatban, hogy függvénysorozat konvergenciájából csak további erős megszorítások teljesülése esetén következik, hogy a függvénysorozat elemeinek deriváltjai is konvergálnak.)

Gondoljuk végig mi volt a Tétel B (csak vázlatosan ismertetett) bizonyításának a gondolata. Azt használtuk ki, hogy az eloszlásüggvény által definiált karakterisztikus függvény (mely ebben az esetben természetes módon Fourier sorként is értelmezhető volt) ismeretében kifejezhető volt az eredeti eloszlás (ez volt a $(*)$ formula), és e formula segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklődő eloszlásra. Adaptálható-e ez a módszer más esetekre? Tudjuk-e hasonló módon vizsgálni akkor, ha nem rácsos eloszlású, hanem például sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlásokat vizsgálunk, vagy az általános esetben, amikor az eloszlásfüggvény nem rácsos eloszlású és nincsen sűrűségfüggvénye sem? A válasz ezekre a kérdésekre azon múlik, hogy tudunk-e a $(*)$ formulához hasonló egyszerű inverziós formulát felírni, mely a sűrűségfüggvényt vagy az eloszlásfüggvényt fejezi ki a karakterisztikus függvénnyel.

A sűrűségfüggvény esetében a válasz igenlő, és ennek következtében a Tétel B-hez hasonló eredményt tudunk bizonyítani szép sűrűségfüggvénnyel rendelkező független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényére. Az eloszlásfüggvény helyzete bonyolultabb. Ebben az esetben is bizonyítható inverziós formula, de az túl bonyolult, és vizsgálatokban nem jól használható. Ebben az esetben más módszert érdemes követni. Azt fogjuk vizsgálni a karakterisztikus függvény segítségével, hogy az eloszlásban való konvergenciát kifejező (b) reláció mikor teljesül. Látni fogjuk, hogy erre jól kezelhető szükséges és elégséges feltételt lehet adni a karakterisztikus függvények nyelvén. Ez lesz a következő előadás témája.

Kiegészítés: Az 1. Tétel és a Lemma C bizonyítása.

Az 1. Tétel bizonyítása előtt bebizonyítjuk az alábbi elemi analízisbeli Lemmát.

Lemma. *Legyen $F(x)$ folytonos függvény a számegyenesen. Ekkor az $F(x)$ pontnak legfeljebb megszámlálható szakadási pontja van.*

A Lemma bizonyítása. Az $F(x)$ függvény folytonossága miatt az $F(\cdot)$ függvénynek minden pontban van baloldali és jobboldali határértéke, és az $F(\cdot)$ függvény akkor és csak akkor folytonos egy x pontban, ha annak bal és jobboldali határértéke az x pontban megegyezik. Ha az x pont nem folytonossági pontja az $F(\cdot)$ függvénynek, akkor annak bal és jobboldali határértéke között, az $[F(x-0), F(x+0)]$ nem üres intervallum belsejében van egy racionális pont. Rendeljük hozzá ehhez az intervallumhoz egy ilyen pontot. Mivel az $F(\cdot)$ függvény monotonítása miatt minden ilyen intervallumhoz különböző pontot rendelünk hozzá, és csak megszámlálható sok racionális szám van, innen következik a lemma állítása.

Az 1. Tétel binonyítása: Tegyük fel először azt, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy F eloszlásfüggvényhez, és tekintsünk egy folytonos és korlátos $g(\cdot)$ függvényt a számegyenesen. Ekkor a g függvény folytonossága és az F illetve F_n eloszlásfüggvények viselkedése miatt $\pm\infty$ pontok környezetében minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan elég nagy $K = K(\varepsilon) > 0$, melyre $\int_{u\colon\, |u|>K} |g(u)|\, dF_n(u) < \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ez az állítás érvényes akkor is, ha az F_n eloszlásfüggvényt az F eloszlásfüggvénnyel helyettesítjük. Valóban, válasszunk egy olyan B számot, melyre $\sup\limits_{-\infty<x<\inf x} |g(x)| \le B$. Azt állítjuk, hogy létezik olyan K szám, melyre $F_n(-K) < \frac{\varepsilon}{2B}$, és $1 - F_n(K) < \frac{\varepsilon}{2B}$ minden $n = 0, 1, 2, \dots$ számra. Valóban ez az állítás érvényes az F_0 határfüggvényre és egy K_0 számra, feltehetjük azt is, hogy K_0 az $F_0(\cdot)$ függvény folytonossági pontja. Ekkor abból, hogy az F_n eloszlásfüggvények konvergálnak eloszlásban az F_0 függvényhez innen következik, hogy létezik olyan n_0 index, hogy az előző egyenlőtlenség érvényes az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvényekre minden $n \ge n_0$ indexre. Ha a fenti K_0 számot helyettesítjük egy nála nagyobb elég nagy K számmal, akkor teljesül az $F_n(-K) < \frac{\varepsilon}{2B}$ és $1 - F_n(K) < \frac{\varepsilon}{2B}$ és ezért az $\int_{u\colon\, |u|>K} |g(u)|\, dF_n(u) < \varepsilon$ egyenlőtlenség is minden $n = 0, 1, 2, \dots$ számra.

Továbbá a folytonos $g(\cdot)$ függvény a $[-K, K]$ intervallumban egyenletesen folytonos. Ennek az észrevételnek és annak a ténynek a segítségével, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ az

$F(\cdot)$ minden folytonossági pontjában be lehet látni, véve a $[-K, K]$ intervallumnak egy olyan elég finom felosztását, melynek az osztópontjai az F függvény folytonossági pontjai, hogy

$$\left| \int_{u:\ |u|\le K} g(u)\, dF_n(u) - \int_{u:\ |u|\le K} g(u)\, dF(u) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n \ge n_0(\varepsilon).$$

(E lépésben kihasználjuk azt, hogy egy monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van. Innen $\varepsilon \to 0$ határátmenettel megkapjuk az (a) állítás bizonyítását.

Megfordítva tegyük fel, hogy teljesül az (a) reláció, és legyen x az F függvény folytonossági pontja. Rögzítve egy kis $\varepsilon > 0$ számot definiáljuk a következő $g^\pm(u) = g^\pm_{x,\varepsilon}(u)$, $-\infty < u < \infty$ folytonos és korlátos függvényeket: $g^+(u) = 0$, ha $u \ge x + \varepsilon$, $g^+(u) = 1$, ha $u \le x$, $g^+(u) = \dfrac{x+\varepsilon-u}{\varepsilon}$, ha $x \le u \le x+\varepsilon$, $g^-(u) = 0$, ha $u \ge x$, $g^-u) = 1$, ha $u \le x - \varepsilon$, $g^-(u) = \dfrac{x-u}{\varepsilon}$, ha $x - \varepsilon \le u \le x$. Alkalmazva az (a) állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x-\varepsilon) &\le \int g^-_{\varepsilon,x}(u)F(\,du) = \lim_{n\to\infty} \int g^-_{\varepsilon,x}(u)F_n(\,du) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} \int g^+_{\varepsilon,x}(u)F_n(\,du) = \int g^+_{\varepsilon,x}(u)F(\,du) \le F(x+\varepsilon), \end{aligned}$$

és véve az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, feltéve, hogy az x pont az F függvény folytonossági pontja.

A Lemma C bizonyítása. Teljesüljün az $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k F(\,dx) < \infty$ feltétel valamely pozitív egész k számra. Azt fogjuk belátni, hogy ha valamilyen $0 \le j < k$ számra $\dfrac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra, akkor $\dfrac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\varphi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} i^{j+1}u^{j+1}e^{itu}F(\,du)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Innen indukcióval következik a Lemma C fő állítása, mivel az indukciós feltevés érvényes $j = 0$ esetén.

Viszont

$$\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\varphi(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t+h) - \frac{d^j}{dt^j}\varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} - i^j u^j e^{itu}}{h} F(\,du),$$

és az integrandus teljesíti az

$$\lim_{h\to 0} \frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} - i^j u^j e^{itu}}{h} = i^j u^{j+1} \lim_{h\to 0} \frac{e^{ihu}-1}{h} = i^{j+1}u^{j+1}e^{itu}$$

relációt. Azt kell megmutatnunk, hogy jogunk van a limeszelésben az integrálás és limeszképzés sorrendjét felcserélni. Ehhez a Lebesgue dominált konvergenciatétele alapján elég azt bemutatni, hogy létezik olyan $K(u)$ függvény, melyre

$$\left|\frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} i^j u^j - e^{itu}}{h}\right| \le K(u) \qquad \text{minden } |h| \le \frac{1}{2} \text{ számra,}$$

és $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)F(\,du) < \infty$. Vegyük észre, hogy

$$\left|\frac{i^j u^j e^{i(t+h)u} i^j u^j - e^{itu}}{h}\right| = |u|^j \left|\frac{e^{ihu} - 1}{h}\right| = |u|^j |u + \vartheta| \le |u|^{j+1} + |u|^j$$

valamilyen $-\dfrac{1}{2} \le -|h| < \vartheta <\le |h| \le \dfrac{1}{2}$, ha $|h| \le \frac{1}{2}$ számra. Ezért választhatjuk a kívánt $K(u)$ függvényt, mint $K(u) = |u|^j + |u|^{j+1}$, és nyílván $\int_{-\infty}^{\infty} K(u)F(\,du) < \infty$, ha $j < k$.