A Valószínűségszámítás II. előadássorozat negyedik előadása.
2002. október 1.

Határoszlástételek vizsgálata II.

Ennek az előadásnak célja annak ismertetése, hogy hogyan kaphatunk jól kasználható módszert határeloszlástételek bizonyítáára. Megfogalmazunk egy alapvető eredményt, melynek bizonyítása a következő előadás anyaga lesz. Későbbi előadásokban fogjuk ismertetni azt, hogyan lehet ezen eredmény segítségével a centrális határeloszlástételt.

A határeloszlások vizsgálatának érdekében először felidézzük az alábbi az előző órán tárgyalt eredményt.

1. Tétel. *$F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty} \int g(u)\, dF_n(u) = \int g(u)\, dF(u) \tag{a}$$

azonosság.

Láttuk továbbá, hogy a speciális $e_t(u) = e^{itu}$ függvények integráljai, a $\varphi_n(t) = \int e^{itu}\, dF_n(u)$ függvények, $-\infty < t < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, melyeket karakterisztikus függvénynek nevezünk, könnyebben vizsgálhatóak, mint az általános folytonos, korlátos függvények integráljai. Ezért olyan erdeményt kívánunk bizonyítani, amelyik a karakterisztikus függvények tulajdonságainak segítségével adja meg eloszlásfüggvények konvergenciájának szükséges és elégséges feltételét. Ahhoz, hogy ilyen eredményt bizonyíthassunk, először meg kell mutatnunk, hogy egy eloszlásfüggvényt meghatároz annak karakterisztikus függvénye. Ezt mondja ki az alábbi eredmény.

2. Tétel. *Egy eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatározza karakterisztikus függvénye, azaz, ha $F(\cdot)$ és $G(\cdot)$ két eloszlásfüggvény, és ezek $\varphi_F(t) = \int e^{itu} F(\,du)$, $\varphi_G(t) = \int e^{itu} G(\,du)$ karakterisztikus függvényei teljesítik a $\varphi_F(t) = \varphi_G(t)$ azonosságot minden $-\infty < t < \infty$ számra, akkor $F(x) = G(x)$ minden x számra.*

Annak érdekében, hogy a 2. Tételt belássuk szükségünk van egy olyan eredményre, mely szerint a trigonometrikus függvények, illetve azok véges lineáris kombinációi, a folytonos és korlátos függvények egy elég gazdag családját alkotják. Weierstrass alább megfogalmazott második approximációs tétele ilyen eredmény.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(t)$ (valós vagy komplex értékű) függvényre és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan ($n = n(f, \varepsilon)$ fokszámú) $P_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrikus polinom, melyre*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

Megjegyzés: Weierstrass második approximációs tétele csak 2π szerint periódikus függvények approximációjának lehtősségét állítja $P_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ alakú trigonometrikus polinomok segítségével. Ez a megszorítás valóban szükséges, hiszen az ilyen trigonometrikus polinomok 2π szerint periódikusak. Viszont ebből az állításból azonnal következik, hogy tetszőleges $K>0$ és $\varepsilon>0$ számra és egy folytonos és K szerint periódikus $f(\cdot)$ függvényre létezik olyan $P_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{i2\pi kt/K}$ trigonometrikus polinom, melyre

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t)-P_n(t)|<\varepsilon.$$

A 2. Tétel bizonyítása: Először azt mutatjuk meg Weierstrass második approximációs tételének segítségével, hogy a tétel feltételeinek teljesülése esetén tetszőleges $K>0$ számra és K szerint periódikus $h(\cdot)$ függvényre $\int h(u)F(\,du)=\int h(u)G(\,du)$. Valóban, Weierstrass tétele szerint tetszőleges $K>0$ és $\varepsilon>0$ számokra létezik olyan $P_n(t)=\sum\limits_{j=-n}^{n} a_j e^{2\pi ijt/K}$ trigonometrikus polinom, melyre teljesül a $\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|P_n(t)-h(t)|\le\varepsilon$ becslés. Integrálva a $h(\cdot)$ és a $P_n(\cdot)$ függvényt a F és G eloszlásfüggvény szerint, a fenti approximációból kapjuk, hogy $\int|h(u)-P_n(u)|F(\,du)\le\varepsilon$ és $\int|h(u)-P_n(u)|G(\,du)\le\varepsilon$. Ezért $\left|\int h(u)F(\,du)-\int h(u)G(\,du)\right|\le 2\varepsilon$. Mivel ezt az egyenlőtlenséget minden $\varepsilon>0$ számra be tudjuk bizonyítani, ezért $\int h(u)F(\,du)=\int h(u)G(\,du)$, mint állítottuk. Innen az is következik, hogy ha $h(\cdot)$ kompakt tartójú folytonos függvény, azaz ha létezik olyan A szám, melyre $h(u)=0$, ha $|u|\ge A$, akkor $\int h(u)F(\,du)=\int h(u)G(\,du)$. Valóban, definiáljuk minden $K>A$ számra azt a $h_K(\cdot)$ függvényt, mely a $h(\cdot)$ függvény $[-K,K]$ intervallumra vett megszorításának a $2K$ szerinti periodikus kiterjesztése, azaz $h_K(u)=h(u-2lK)$, ahol l olyan egész szám, melyre $-K\le u-2lK<K$. Ekkor például a konvergens függvénysorozataok integráljának limeszére vonatkozó Lebesgue féle dominált konvergencia tételből következik, hogy

$$\int h(u)F(\,du)=\lim_{K\to\infty}\int h_K(u)F(\,du)=\lim_{K\to\infty}\int h_K(u)G(\,du)=\int h(u)G(\,du).$$

(A Lebesgue féle dominált konvergencia tételt megfogalmazzuk ennek az előadásnak a kiegészítésében is. Ahhoz, hogy lássuk, ez az eredmény használható, vegyük észre, hogy $\lim\limits_{K\to\infty} h_K(x)=h(x)$ minden x számra, és $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|h_K(x)|\le\text{const.}$)

Legyenek $-\infty<x<y<\infty$ olyan számok a számegyenesen, melyek folytonossági pontjai mind az F mind a G eloszlásfüggvénynek. Belátjuk a fenti reláció segítségével, hogy $F(y)-F(x)=G(y)-G(x)$. Valóban, rögzítsünk egy $\varepsilon>0$ számot, és definiáljuk a következő $h(\cdot)=h_\varepsilon(\cdot)$függvényt: $h(u)=1$, ha $x\le u\le y$, $h(u)=0$, ha $y+\varepsilon\le u$ vagy $u\le x-\varepsilon$, $h(u)=\dfrac{y+\varepsilon-u}{\varepsilon}$, ha $y\le u\le y+\varepsilon$, $h(u)=\dfrac{u-x+\varepsilon}{\varepsilon}$, ha $x-\varepsilon\le u\le x$. Felhasználva a $\int h_\varepsilon(u)F(\,du)=\int h_\varepsilon(u)G(\,du)$ azonosságot minden $\varepsilon>0$ számra, és azt hogy $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int h_\varepsilon(u)F(\,du)=F(y)-F(x)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int h_\varepsilon(u)G(\,du)=G(y)-G(x)$, ha x és y az

F és G függvény folytonossági pontjai, $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk az $F(y)-F(x) = G(y)-G(x)$ azonosságot.

Ez utóbbi azonosságot felhasználva és alkalmazva az $x \to -\infty$ határátmenetet kapjuk, hogy $F(y) = G(y)$, ha y mind az $F(\cdot)$ mind a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek folytonossági pontja. Mivel az F és G eloszlásfüggvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van, és mind a két függvény balról folytonos, innen következik, hogy az F és G eloszlásfüggvények megegyeznek.

Szeretnénk eldönteni egy $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvénysorozatról ezen eloszlásfüggvények $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényei ismeretében, hogy konvergálnak-e eloszlásban valamely (számunkra esetleg ismeretlen) $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez. Ha konvergálnak, akkor természetesen szeretnénk meghatározni ezen eloszlásfüggvények $F(\cdot)$ limeszét is. Az 1. Tételben megfogalmazott (a) feltétel szerint a konvergencia teljesüléséhez szükséges, hogy a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények minden rögzített t szám esetén konvergáljanak valamely számhoz, ha $n \to \infty$. De elég-e egy ilyen konvergencia teljesülése az eloszlások konvergenciájához? Az alábbi példa megmutatja, hogy erre a kérdésre a válasz nemleges.

Példa: Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2 \dots$, a $[-n, n]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz legyen $F_n(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f_n(u) = \dfrac{1}{2n}$, ha $-n \le u \le n$, $f_n(u) = 0$, ha $|u| > n$. Ekkor az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak az $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 0$, ha $t \ne 0$ képlettel megadott $\varphi(t)$ függvényhez, amelyik az origóban nem folytonos. Továbbá az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban, mert minden véges $[a, b]$ intervallumra

$$\lim_{n\to\infty} [F_n(b) - F_n(a)] = 0.$$

Valóban, az F_n eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{itu}\, du = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{2nit},$$

ahonnan $|\varphi_n(t)| \le \dfrac{1}{|t|n}$. Innen $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$, ha $t \ne 0$. Másrészt, $\varphi_n(0) = 1$ minden n-re tehát, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1$. Ezenkívül egy véges $[a, b]$ intervallumra $F_n(b) - F_n(a) = \dfrac{b-a}{n}$, ha $n \le \max(|a|, |b|)$, ahonnan következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} [F_n(b) - F_n(a)] = 0$. Ez azt jelenti, hogy az F_n eloszlások ,,kifolynak a végtelenbe", és ezért nincs határeloszlásuk.

Vegyük viszont észre, hogy érvényes a következő lemma:

1. Lemma. *Tetszőleges F eloszlásfüggvény $\varphi(t) = \int e^{itu} F(\,du)$ karakterisztikus függvénye folytonos minden pontban.*

Bizonyítás: Jelölje $\varphi(t) = \int e^{itu} F(\,du)$ az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét. Ekkor tetszőleges t, δ illetve $K > 0$ számra teljesül a

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| \le \int |e^{i(t+\delta)u} - e^{itu}| F(\,du) \le \int_{u\colon |u| \le K} \sup_{u\colon |u|\le K} |e^{i(t+\delta)u} - e^{itu}| F(\,du)$$

$$+ \int_{u\colon |u|>K} 2F(\,du) \le \sup_{u\colon |u|\le K} |e^{i\delta u} - 1| + F(-K) + (1 - F(K))$$

egyenlőtlenség. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz választhatunk olyan $K = K(\varepsilon)$ számot, melyre $F(-K) + (1 - F(K)) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Ezután elég kis $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, K) > 0$ választással elérhetjük, hogy $\sup\limits_{u\colon |u|\le K} |e^{i\delta u} - 1| \le \frac{\varepsilon}{2}$, ha $\delta \le \delta_0$. Innen következik, hogy $|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| \le \varepsilon$, ha $\delta < \delta_0$, azaz a $\varphi(\cdot)$ függvény folytonos.

A 2. lemmából és Tétel A-ból következik, hogy amennyiben F_n eloszlásfüggvények sorozata konvergál egy F eloszlásfüggvényhez, akkor azok karakterisztikus függvényei egy folytonos függvényhez konvergálnak. Ugyanis a karakterisztikus függvények limeszei megegyeznek a határeloszlás karakterisztikus függvényével, ami az 1. lemma szerint folytonos függvény. Az 1. lemma előtt tekintett példa azt mutatja, hogy ezt a folytonossági feltételt nem szabad elhagyni, ha a karakteresztikus függvények nyelvén akarunk feltételt adni eloszlások konvergenciájára. Ez a példa azt is sejteti, hogy a legkritikusabb pont az origó, és mindenek előtt itt kell biztosítani a karakterisztikus függvények limeszének folytonosságát. Valóban, mint az alább megfogalmazott, fontossága miatt Alaptételnek nevezett eredmény azt mondja ki, hogy egy eloszlásfüggvénysorozat karakterisztikus függvényeinek konvergenciája egy az origóban folytonos függvényhez a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az eloszlásfüggvények konvergáljanak valamely határeloszláshoz. Sőt, ez a tétel segítséget ad a határeloszlásfüggvény megtalálásához is.

Eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden $-\infty < t < \infty$ számra, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény, melynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, mely egy $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, jelöli az $F_n(u)$, $\varphi_0(t)$ pedig az $F_0(u)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Ennek az eredménynek a bizonyítása lesz a következő előadás témája.