A Valószínűségszámítás II. előadássorozat ötödik előadása.
2002. október 8.

Az Eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel bizonyítása.

Először felidézem az előadáson bizonyítandó eredményt.

Eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden $-\infty < t < \infty$ számra, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény, melynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, mely egy $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, jelöli az $F_n(u)$, $\varphi_0(t)$ pedig az $F_0(u)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Az alaptétel bizonyításában alapvető szerepet játszik eloszlásfüggvényekből álló sorozatok relatív kompaktságának az alább megfogalmazott definiciója, illetve egy önmagában is érdekes tétel, mely egyszerű szükséges és elégséges feltételt ad eloszlásfüggvénysorozatok relatív kompaktságára.

Eloszlásfüggvények relatív kompaktságának definiciója. *Legyen adva $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy sorozata. Azt mondjuk, hogy ez az eloszlásfüggvénysorozat relatív kompakt, ha az F_n sorozat tetszőleges F_{n_k} részsorozatának $k = 1, 2, \dots$, létezik $F_{n_{k_j}}$, $j = 1, 2, \dots$, eloszlásban konvergens részsorozata.*

A későbbi eredmény megfogalmazása érdekében megfogalmazzuk az alábbi eredményt.

Eloszlásfüggvények feszességének definiciója. *Eloszlásfüggvények egy F_n sorozata feszes, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, melyre teljesül az $F_n(K) - F_n(-K) \ge 1 - \varepsilon$ egyenlőtlenség* minden $n = 1, 2, \dots$ *indexre.*

Megjegyzem, hogy a fenti definicióban megfogalmazott feltétel ekvivalens azzal, hogy $F_n(-K) < \varepsilon$, $1 - F_n(K) < \varepsilon$ alkalmas $K = K(\varepsilon)$ számra minden $\varepsilon > 0$ számra és $n = 1, 2, \dots$ indexre. A feszesség szemléletes tartalma az, hogy egy $F_n(\cdot)$ eloszlású ξ_n valószínűségi változóra $P(\xi_n \in [-K, K]) \ge 1 - \varepsilon$, azaz meg tudunk adni egy olyan az n indextől nem függő intervallum, hogy annak valószínűsége, hogy a ξ_n ebbe az intervallumba esik nagyobb, mint $1 - \varepsilon$. Most mefogalmazzuk az alábbi fontos tételt.

Tétel eloszlásfüggvények relatív kompaktságáról. *Eloszlásfüggvények egy $F_n(\cdot)$ sorozata akkor és csak akkor relatív kompakt, ha feszes. Speciálisan eloszlásfüggvények eloszlásban konvergens sorozata feszes.*

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy ha az F_n, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata relatív kompakt akkor feszes is.

Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy az eloszlásfüggvények ezen F_n sorozata nem feszes. E feltevés teljesülése esetén létezik egy $\varepsilon > 0$ szám, az F_n eloszlásfüggvények egy olyan F_{n_k} részsorozata, és egy olyan $K_n \to \infty$ számsorozat, melyekre $F_n(K_n) - F_n(-K_n) < 1 - \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ennek az F_{n_k} eloszlásfüggvénysorozatnak nincs eloszlásban konvergens részsorozata. Innen következik, hogy az indirekt feltevés ellentmondáshoz vezet.

Valóban, tegyük fel, hogy az F_{n_k} eloszlásfüggvénysorozat valamely $F_{n_{k_j}}$ részsorozata eloszlásban konvergál egy F eloszlásfüggvényhez. Ekkor létezik olyan $K > 0$ szám, melyre $F(K) - F(-K) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, és feltehetjük, hogy a $\pm K$ pontok az F eloszlásfüggvény folytonossági pontjai. (Egy eloszlásfüggvénynek, és általánosabban egy monoton függvénynek csak megszámlálható sok olyan pontja van, ahol nem folytonos.). Ekkor az eloszlásban való konvergencia definiciója alapján teljesülni kellene a

$$\lim_{j\to\infty} \left(F_{n_{k_j}}(K) - F_{n_{k_j}}(-K) \right) = F(K) - F(-K)$$

relációnak. Ez azonban nem lehetséges, mert a baloldalon szereplő sorozat $\limsup$-ja kisebb mint $1 - \varepsilon$, míg a jobboldal nagyobb mint $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Bebizonyítjuk a Tétel másik állítását, mely szerint, ha eloszlásfüggvények egy F_n sorozata feszes, akkor az relatív kompakt. Azt kell belátnunk, hogy az F_n sorozat tetszőleges részsorozatának létezik eloszlásban konvergens részorozata. Az egyszerűbb jelölés érdekében a részsorozat újra indexelésével jelöljük ezt a részsorozatot is F_n-nel. Azt kell belátnunk, hogy ennek az új (szintén feszes) F_n mértéksorozatnak létezik eloszlásban konvergens részsorozata. Ennek az állításnak a bizonyítása érdekében először megmutatjuk az úgynevezett átlós eljárás segítségével, hogy F_n eloszlásfüggvények sorozatának van egy olyan F_{n_j} részsorozata, melyre létezik az

$$\tilde{F}(t) = \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(t) \tag{b1}$$

határérték minden racionális t számra.

Valóban, rendezzük a racionális számok (megszámlálható) halmazát valamilyen $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$ sorozatba. Mivel $0 \le F_n(u) \le 1$ minden $-\infty < u < \infty$ számra, ezért létezik az egész számoknak olyan $\bar{n}_j = (n_{j,1})$ részsorozata, melyre a $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_{j,1}}(u^{(1)}) = \tilde{F}(u^{(1)})$ határérték létezik. Ennek a sorozatnak létezik olyan $n_{j,2}$ részsorozata, melyre létezik a $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_{j,2}}(u^{(2)}) = \tilde{F}(u^{(2)})$ határérték. Ezt az eljárást folytatva kapunk egymásba skatulyázott $n_{j,p}$, $j = 1, 2, \dots$, sorozatot minden $p = 1, 2, \dots$ számra, melyekre $\{n_{p+1,j},\ j = 1, 2, \dots\} \subset \{n_{p,j},\ j = 1, 2, \dots\}$, $p = 1, 2, \dots$, és minden $p = 1, 2, \dots$ számra létezik a $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_{j,p}}(u^{(p)}) = \tilde{F}(u^{(p)})$ határérték. Ekkor az $n_j = n_{j,j}$ sorozat teljesíti a (b1) relációt.

Vezessük be az

$$F(u) = \sup_{u^{(k)} < u} \tilde{F}\left(u^{(k)}\right) \tag{b2}$$

függvényt. Azt állítjuk, hogy $F(u)$ eloszlásfüggvény, és az $F_{n_j}(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ahol az n_j számsorozat olyan, amelyik teljesíti a (b1) relációt. Ha ezt az állítást belátjuk, akkor befejeztük a Tétel bizonyítását. (A tétel utolsó állítása, miszerint eloszlásfüggvények konvergens sorozata feszes, az előző eredmények alapján már nyilvánvaló. Ugyanis egy konvergens részsorozat relatív kompakt, ezért a Tétel már bebizonyított része szerint feszes.)

Az, hogy az $F(u)$ függvény eloszlásfüggvény azt jelenti, hogy ez a függvény teljesíti a következő négy tulajdonságot.

(i) $F(u)$ az u változó balról folytonos függvénye.

(ii) $\lim\limits_{u\to\infty} F(u)=1$.

(iii) $\lim\limits_{u\to-\infty} F(u)=0$.

(iv) $F(u)$ monoton függvény.

Mivel a racionális koordinátájú pontokon definiált $\tilde F(u)$ minden koordinátájának monoton függvénye, ezért a (b2) formulában definiált $F(\cdot)$ függvény teljesíti az (i) és (iv) tulajdonságokat. Továbbá ebből a monotonitásból az is következik, hogy a (b2) formulában a sup helyett limeszt írhatunk, ahol olyan $u^{(p)}$ sorozatot tekintünk a limeszben, melyre $u^{(p)}<u$ számra, és $\lim\limits_{p\to\infty} u^{(p)}=u$. Vegyük észre, hogy a (ii) és (iii) tulajdonság érvényes akkor, ha az F_n függvényeket a $\tilde F$ függvénnyel helyettesítjük, és a limeszt csak racionális koordinátájú pontokban tekintjük. (A bizonyásnak ebben a pontjában használjuk ki, hogy az F_n eloszlásfüggvények feszesek.) Innen és a (b2) formulából következik, hogy az F függvény a (ii) és (iii) tulajdonságokat is teljesíti.

Annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy az F_{n_j} eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez tekintsük az F függvény valamely u folytonossági pontját, majd minden rögzített $\varepsilon>0$ számhoz válasszunk olyan $\delta=\delta(\varepsilon)$ számot, melyre $F(u)-\varepsilon\le F(u-\delta)\le F(u)\le F(u+\delta)\le F(u)+\varepsilon$. Válasszunk ezután két racionális r és $\bar r$ pontot, melyekre $u-\delta<r<u<\bar r<u+\delta$. Ekkor a $\tilde F(\cdot)$ függvény monotonitási tulajdonságai és az F függvény definiciója alapján

$$F(u)-\varepsilon\le F(u-\delta)<\tilde F(r)\le F(u)\le \tilde F(\bar r)\le F(u+\delta)\le F(u)+\varepsilon$$

Innen, a $\tilde F$ függvény definiciója és az F_{n_j} függvények monotonitási tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned}F(u)-\varepsilon &\le \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(r)\le \liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(u)\\ &\le \limsup_{j\to\infty} F_{n_j}(u)\le \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(\bar r)\le F(u)+\varepsilon,\end{aligned}$$

ezért

$$-\varepsilon\le \liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(u)-F(u)\le \limsup_{j\to\infty} F_{n_j(u)}-F(u)\le\varepsilon.$$

Mivel ez a reláció minden $\varepsilon>0$-ra igaz, innen következik, hogy $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_j}(u)=F(u)$, és ezt kellett bizonyítani.

Fogalmazzuk meg ezután az alábbi egyszerű, de a továbbiakban fontos észrevételt egy állítás formájában.

Állítás: *Eloszlásfüggvények egy F_n sorozata akkor és csak akkor konvergál egy eloszlásfüggvényhez, ha relatív kompakt, és minden konvergens részsorozatának ugyanaz a határértéke.*

Indoklás: Eloszlások konvergens részsorozata nyílván relatív kompakt, és minden (konvergens) részsorozata ugyanahhoz az eloszlásfüggvényhez konvergál, mint az eredeti sorozat. Megfordítva, ha egy eloszlásfüggvények egy sorozata relatív kompakt, és minden konvergens részsorozatának ugyanaz a határértéke, akkor válasszuk ki egy konvergens részsorozatát és annak határértékét, melyet jelöljünk $G(\cdot)$-szel. Azt állítjuk, hogy az eloszlásfüggvények sorozata konvergál ehhez a $G(\cdot)$ elásfüggvényhez. Valóban, ellenkező esetben a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek létezne olyan x folytonossági pontja, melyre az $F_n(x)$ számsorozat nem konvergál a $G(x)$ számhoz. Ekkor kiválasztható az F_n eloszlásfüggvényeknek egy olyan F_{n_k} részsorozata, melyre létezik $\lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \neq G(x)$ határértéke. Kiválasztva ennek az F_{n_k} sorozatnak egy konvergens részsorozatát, az eredeti eloszlásfüggvényeknek egy olyan részsorozatát kapjuk, amelyiknek határértéke különbözik a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénytől, és ez ellentmondás.

Az alaptételt bizonyításában nagyon hasznos az alábbi lemma, mely feltételt ad a karakterisztikus függvények nyelvén arra, hogy eloszlásfüggvények egy sorozata feszes legyen.

2. Lemma. *Tekintsük F_n eloszlásfüggvények egy sorozatának $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(du)$ karakterisztikus függvényeit, $n = 1, 2, \dots$. Tegyük fel, hogy van a nullának egy olyan $(-\delta, \delta)$ kis környezete, melyre a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények konvergálnak egy $\varphi_0(t)$, $-\delta \le t \le \delta$ függvényhez, és a $\varphi_0(\cdot)$ függvény folytonos az origóban. Ekkor az F_n eloszlások családja feszes.*

Bizonyítás: Írjuk fel a következő azonosságot:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}\,[1-\varphi_n(t)]\,dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} [1-\cos tx]\; dF_n(x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} [1-\cos tx]\,dt\,dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t}{2\delta} - \frac{\sin tx}{2\delta x}\right]_{t=-\delta}^{t=\delta} dF_n(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1-\frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) = \int_{-K}^{K} \left(1-\frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) \\
&\qquad + \int_{|x|>K} \left(1-\frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) = I_{1,n}^{\delta}(K) + I_{2,n}^{\delta}(K),
\end{aligned}
\tag{c1}
$$

ahol $\operatorname{Re} z$ a z szám valós részét jelöli. Belátjuk a (c1) formula segítségével, hogy a 2. lemma feltételeinek teljesülése esetén az F_n mértékek feszesek. Mivel $\left(1-\dfrac{\sin \delta x}{\delta x}\right) \ge$

0 minden x-re és δ-ra, ezért a formula baloldala felső becslést ad az $I_{2,n}^{\delta}(K)$ kifejezésre tetszőleges $\delta > 0$ $n \geq 1$ és $K > 0$ számokra. Továbbá azt állítjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám és $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ egész szám, hogy

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,[1-\varphi_n(t)]\,dt \leq \varepsilon, \qquad \text{ha } n \geq n_0. \tag{c2}$$

Valóban, mivel $\mathrm{Re}\,(1-\varphi_0(0)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(1-\varphi_n(0)) = 0$, és a $\varphi_0(t)$ függvény feltevésünk szerint folytonos az origóban, ezért létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre $0 \leq \mathrm{Re}\,(1-\varphi_0(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ha $|t| \leq \delta$. Ezért nyílván $0 \leq \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,(1-\varphi_0(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Innen viszont azt kapjuk, a Lebesgue féle dominált konvergencia tételből, hogy igaz a (c2) formula. A (c1) és (c2) formulból valamint a (c1) formula után tett megjegyzésből következik, hogy

$$\varepsilon \geq \int_{|x|\geq K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x), \qquad \text{ha } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ elég kicsi, és } n \geq n_0(\delta, \varepsilon). \tag{c3}$$

Válasszunk $K = \frac{1}{2\delta}$-t. Ekkor a (c3) formula integráljában az integrandus nagyobb, mint $\frac{1}{2}$, ezért a (c3) formula azt adja, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ és $n_0 = n_0$ szám, hogy

$$\varepsilon \geq \frac{1}{2}\left(F_n(-K) + (1 - F_n(K))\right), \qquad \text{ha } n \geq n_0.$$

Tovább növelve a K számot elérhetjük, hogy ez az egyenlőtlenség minden n indexre igaz legyen. Az, hogy ez az egyenlőtlenség minden $\varepsilon > 0$ számra és alkalmas $K = K(\varepsilon)$ számra teljesül azt jelenti,hogy az F_n eloszlásfüggvények feszesek.

A bebizonyított eredmények alapján már nem nehéz bebizonyítani az alaptételt.

Az eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel bizonyítása. Bizonyítsuk be először a Tétel azon állítását, amelyik szerint abból a tényből, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei egy az origóban folytonos függvényhez konvergálnak következik az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban való konvergenciája.

A 2. Lemma alapján abból, hogy az F_n eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei egy az origóban folytonos függvényhez konvergálnak következik, hogy az F_n eloszlásfüggvények feszesek. Ezért az eloszlásfüggvények relatív kompaktságáról bizonyított tétel alapján az F_n eloszlásfüggvények relatív kompaktak. Az előadásban Állításként megfogalmazott eredmény alapján ahhoz, hogy belássuk azt, hogy az F_n eloszlások konvergálnak egy eloszlásfüggvényhez, elég megmutatni, hogy az F_n eloszlásfüggvények tetszőleges konvergens F_{n_k} sorozatának a határértéke ugyanaz az F eloszlásfüggvény. Viszont az előző előadás elején 1. Tétel néven felidézett eredmény szerint egy konvergens F_{n_k} eloszlásfüggvénysorozat limeszének a karakterisztikus függvénye a $\varphi_0(t) =$

$\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t)$ függvény, ami független a részsorozattól. Viszont az előző előadáson szereplő 2. Tétel alapján a $\varphi_0(t)$ függvény meghatározza az F határeloszlást. Az elmondottakból a Tétel azon állítása is következik, hogy a határeloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye a $\varphi_0(t)=\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t)$ függvény. (Mellesleg az is kiderült ebből a bizonyításból, hogy karakterisztikus függvények határértéke is karakterisztikus függvény. Ez korántsem nyílvánvaló állítás, és az analízis bizonyos vizsgálataiban hasznos. Erről a Kiegészítésben teszek néhány megjegyzést.)

Ezután már csak az Alaptétel második paragrafusában megfogalmazott állítás bizonyítása van hátra. Sőt, azt már beláttuk a Tétel A és az 1. Lemma eredményében, hogy ha az eloszlásfüggvények határeloszlása létezik, akkor azok karakterisztikus függvényei is konvergálnak, sőt azt is tudjuk, hogy egy folytonos függvényhez konvergálnak. Azt kell még megindokolni, hogy ebben az esetben a karakterisztikus függvények egyenletesen konvergálnak minden véges intervallumon. Ez viszont belátható, ha először felhasználjuk, hogy konvergens F_n eloszlásfüggvények sorozata egyenletesen feszes, és észrevesszük, hogy ebből a tényből az 1. Lemma bizonyításának módosításával az is látható, hogy az F_n eloszlások $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei egyenlő mértékben egyaenletesenfolytonosak, azaz minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta=\delta(\varepsilon$ szám, melyre $|\varphi_n(t)-\varphi_n(s)|\le\varepsilon$, ha $|s-t|\le\delta$. (A lényeg az, hogy a δ küszöbindex nem függ az n, s és t számoktól, ha $|t-s|\le\delta$ és az egyenlőtlenség minden n ésilyen s és t számokra teljesül. Valóban, ha $|t-s|\le\delta$, akkor

$$
\begin{aligned}
|\varphi_n(t)-\varphi_n(s)| &\le \int |e^{iut}-e^{ius}|F_n(\,du) \le \int_{u\colon\, |u|\le K} \sup_{u\colon\, |u|\le K} |e^{iut}-e^{ius}|F_n(\,du) \\
&+\int_{u\colon\, |u|>K} 2F_n(\,du) \le \sup_{(s,t)\colon\, |t-s|\le\delta} |e^{iu(t-s)}-1|+F_n(-K)+(1-F_n(K))
\end{aligned}
$$

egyenlőtlenség. Az F_n eloszlások feszessége miatt tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz választhatunk olyan $K=K(\varepsilon)$ számot, melyre $F_n(-K)+(1-F_n(K))\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ minden $n=1,2,\dots$ számra. Ezután elég kis $\delta=\delta(\varepsilon,K)>0$ választással elérhetjük, hogy $\sup\limits_{u\colon\, |u|\le K} |e^{iut}-e^{ius}1|=\sup\limits_{u\colon\, |u|\le K} |e^{iu(t-s)}-1|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, ha $|t-s|\le\delta$. Innen következik, hogy $|\varphi_n(t+\delta)-\varphi_n(t)|\le\varepsilon$, ha $|t-s|<\delta_0$, azaz a $\varphi_n(\cdot)$ függvények egyenlő mértékben folytonosak.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvények egyenletesen konvergálnak egy $[a,b]$ intervallumban, elég beláni, hogy minden $\varepsilon>0$ számra, létezik olyan n_0 szám, hogy $|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\le\varepsilon$, ha $t\in[a,b]$, és $n\ge n)$, $m\ge n_0$. Ennek belátása érdekében válasszunk olyan $\delta>0$ számot, melyre $|\varphi_n(t)-\varphi_n(s)|\le\frac{\varepsilon}{3}$ minden $n=1,2,\dots$ indexre és olyan (s,t) számpárra, melyre $|t-s|\le\delta$. Válasszuk az $[a,b]$ intervallumnak egy olyan $t_0<t_1<\cdots<t_L=b$ véges felosztását, melyre $t_{l+1}-t_l\le\delta$, $l=1,2,\dots,L-1$. Ezután válasszunk olyan n_0 számot, melyre igaz, hogy $|\varphi_n(t_l)-\varphi_n(t_l)|\le\frac{\varepsilon}{3}$, ha $n\ge n_0$, $m\ge n_0$, és $l=1,\dots,L-1$. Ez lehetséges, mert a $\varphi_n(t)$ számsorozat minden t számra konvergens. Ezután tetszőleges $t\in[a,b]$ számra találhatunk olyan l indexet, melyre $|t-t_l|\le\delta$, és felírhatjuk, hogy $|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)|\le$

$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t_l)| + |\varphi_m(t) - \varphi_m(t_l)| + |\varphi_n(t_l) - \varphi_m(t_l)| \le \varepsilon$, ha $n \ge n_0$ és $m \ge n_0$. Az alaptételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés: A bizonyított eredmény speciálisan azt is mondja, hogy karakterisztikus függvények konvergens sorozatának a határértéke is karakterisztikus függvény. Felmerülhet egyben az igény, hogy jellemezzük azokat a függvényeket, melyek egy alkalmas valószínűségi mérték karakterisztikus függvényei. Ezt megfogalmazták egy korántsem könnyű eredményben, amelyiket az irodalomban Bochner tételnek hívnak. Mivel ez az eredmény elsősorban az analízisben és nem a valószínűségszámításban fontosak, ezt általában valószínűségszámítási tankönyvekben bizonyítás nélül szokták ismertetni. A Kiegészítésben fogok írni róla, és röviden ismertetem a probléma hátterét.

KIEGÉSZÍTÉS: A.) *A mértékelmélet legfontosabb eredményei konvergens függvénysorok integráljairól.*

A valószínűségszámítás eredményeinek bizonyításában gyakran van szükségünk olyan eredményekre, melyek azt mondják ki, hogy konvergens függvények sorozatának az integrálja valamely mérték szerint konvergál a határfüggvény integráljához eme mérték szerint. Az ilyen eredmények vizsgálata a mértékelmélet témakörbe tartozik. Mégis, hasznosnak látszik a legfontosabb eredmények ismertetése. Ezek az úgynevezett Lebesgue (dominated convergence) tétel, a Beppo–Levy tétel és a Fatou lemma. Leírok néhány egyszerű példát is, melyek segíthetnek ezen eredmények tartalmát jobban megérteni.

Lebesgue tétel. *Legyen f_n, $n = 1, 2, \dots,$ mérhető függvények sorozata egy $(X, \mathcal{X}, \mu)$ mértéktéren. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban, és létezik olyan "domináns" g függvény az $(X, \mathcal{X}, \mu)$ téren, melyre $|f_n(x)| \le g(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban minden $n = 1, 2, \dots,$ indexre, és $\int g(x)\, d\mu(x) < \infty$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f_0(x)\, d\mu(x)$.*

Beppo-Levy tétel. *Legyen f_n, $n = 1, 2, \dots,$ mérhető függvények sorozata egy $(X, \mathcal{X}, \mu)$ mértéktéren. Tegyük fel, hogy az $f_n(x)$ sorozat monoton növekszik, azaz $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \cdots$ majdnem minden $x \in X$ pontban. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ az f_n függvények limesze. Tegyük fel, hogy teljesül az $\int f_1(x)\, d\mu(x) > -\infty$ feltétel. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f_0(x)\, d\mu(x)$. Ez úgy értendő, hogy amennyiben $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x) = \infty$, akkor $\int f_0(x)\, d\mu(x) = \infty$.*

Fatou lemma. *Legyen f_n, $n = 1, 2, \dots,$ mérhető függvények sorozata egy $(X, \mathcal{X}, \mu)$ mértéktéren. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban, és létezik olyan "alsó korlát" g függvény az $(X, \mathcal{X}, \mu)$ téren, melyre $f_n(x) \ge g(x)$ a μ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ pontban minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és $\int g(x)\, d\mu(x) > -\infty$. Ekkor $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) \ge \int f_0(x)\, d\mu(x)$.*

A fenti tételekben szereplő feltételek jobb megértése érdekében tekintsük a következő példát. Legyen $(X, \mathcal{X}, \mu)$ a $(0, 1]$ intervallum, rajta a Borel σ-algebra, és Lebesgue mérték a μ mérték. Definiáljuk a következő $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$, függvényeket ezen a téren. $f_n(x)=n$, ha $0<x\le\frac{1}{n}$, $f_n(x)=0$, ha $\frac{1}{n}\le x\le 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)$ minden $x\in(0,1]$ pontban, ahol $f_0(x)\equiv 0$. Ekkor $\int f_n(x)\,d\mu(x)=1$ minden $n=1,2,\dots$, számra, és $\int f_0(x)\,d\mu(x)=0$. Ekkor a Lebesgue tétel és a Beppo–Levy tétel nem feltételei teljesülnek, a Fatou lemma feltételei pedig teljesülnek.

Legyen $f_n(x)=-\frac{1}{x}$, ha $0<x\le\frac{1}{n}$, és $f_n(x)=0$, ha $\frac{1}{n}<x\le 1$, $n=1,2,\dots$. Ekkor ez egy monoton függvénysorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)$, $f_0(x)\equiv 0$. Ekkor $\int f_n(x)\,dx=-\infty$ minden $n=1,2,\dots$, számra, és $\int f_0(x)\,dx=0$. Ekkor a Beppo–Levy tételben szereplő feltételek közül az $\int f_1(x)\,d\mu(x)>-\infty$ nem teljesül.

KIEGÉSZÍTÉS: B.) *Karakterisztikus függvények jellemzése.*

A karakterisztikus függvények jellemzése természetes problémája a Fourier analízisben. Emlékeztettek arra, hogy egy integrálható $f(x)$ függvény Fourier transzformáltját az

$$\tilde f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)\,dx,\qquad -\infty<t<\infty,$$

képlettel szokás definiálni, egy μ előjeles mértéknek, amely $\mu+\mu_1-\mu_2$ alakban előállítható, ahol μ_1 és μ_2 véges mérték szintén szokás definiálni a Fourier transzformáltját az

$$\varphi_\mu(t)=\int e^{itx}\mu(dx)=\int e^{itx}\mu_1(dx)-\int e^{itx}\mu_2(dx)$$

alakban. (A mértékelmélet egyik fontos eredménye, az úgynevezett Hahn–féle felbontási tétel szerint minden úgynevezett korlátos változúsú előjeles mérték előállítható ilyen alakban). Mint az ebben az előadásban tárgyalt eredmény is mutatja gyakran érdemes bizonyos problémák vizsgálatában áttérni a függvények vagy mértéket Fourier transzformáltját tekinteni, és azok segítségével vizsgálni a minket érdeklő eredményeket. Jegyezzük meg, hogy egy karakterisztikus függvény nem más, mint egy (pozitív) egyre normált mérték Fourier transzformáltja. Ahhoz azonban, hogy a Fourier transzformáltakkal jól tudjunk dolgozni szükséges, hogy lássuk, hogyan tükröződnek az eredeti függvények vagy előjeles mértékek tulajdonságai azok Fourier transzformáltjában.

Az ilyen jellegű kérdések között az egyik természetes probléma az, hogy lássuk a pozitív függvények vagy általánosabban pozitív mértékek (azaz olyan μ σ-additív halmazfüggvények a számegyenes Borel σ-algebráján, melyekre $\infty>\mu(A)\ge 0$ minden Borel-mérhető A halmazra) pozitívitása, hogyan tükröződik annak Fourier transzformáltjában. Ezt a kérdést válaszolja meg az alább ismertetett Bochner-tétel. Ennek megfogalmazása előtt azonban bevezetem a következő a Tétel megfogalmazásában fontos szerepet játszó fogalmat.

Pozitív definit függvény definiciója. *Egy a számegyenesen értelmezett $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, függvény pozitív definit, ha tetszőleges $x_1,\dots,x_n$ valós és $z_1,\dots,z_n$ komplex számokra $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{b} z_j\bar z_k f(x_j-x_k)\ge 0$. (Ez természetesen azt is jelenti, hogy a tekintett kifejezés a lehetséges komplex szám együtthatók ellenére mindig valós.*

Most megfogalmazom a Bochner tételt.

Bochner tétel. *Egy $f(x)$ függvény akkor és csak akkor Fourier transzformáltja egy (pozitív, véges) mértéknek, ha pozitív definit és folytonos függvény. Speciálisan akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye egy alkalmas valószínűségi mértéknek, ha pozitív definit, folytonos függvény, és ezenkívül $f(0) = 1$.*

Annak bizonyítása, hogy egy mérték Fourier transzformáltja pozitív definit és folytonos függvény viszonylag egyszerűen bizonyítható. Azt kell először ellenőrizni, hogy ez a tulajdonság érvényes az $e_x(t) = e^{itx}$ alakú függvényekre, és ez öröklődik az $\int e^{itx}\mu(\,dx)$ alakú függvényekre is. Az állítás másik felének a bizonyítása lényegesen nehezebb.

A bizonyítást nem ismertetem, de érdemes néhány szót szólni a nehézség okáról. Annak bizonyítása, hogy egy mérték Fourier transzformáltja folytonos, pozitív definit függvény azért viszonylag egyszerű, mert explicit módon felírt függvény tulajdonságait kell ellenőrizni. Viszont, amikor egy függvény van adva, nem létezik egyszerű inverziós formula, melynek segítségével ,,vissza lehet keresni" az eredeti előjeles mértéket, aminek ez a függvény a Fourier transzformáltja. A természetes bizonyítás úgy történhet, hogy először csak olyan függvényeket vizsgálunk, melyekre van viszonylag egyszerű inverziós formula, majd ilyenekkel próbálunk közelíteni az általános esetben. E program végrehajtásában hasznos lehet az Alaptétel, amely segít a bonyolultabb esetek vizsgálatában szükséges határátmenet végrehajtásában.

Végül még egy megjegyzést teszek. Elvileg a Bochner tétel lehetőséget ad annak eldöntésére, hogy egy függvény karakterisztikus függvény-e. De a szükséges feltételek ellenőrzése nehéz, ezért ez az eredmény nem igazán alkalmas e probléma vizsgálatában.