A Valószínűségszámítás II. előadássorozat nyolcadik előadása.

2002. november 5.

Határeloszlástételek független vektor értékű valószínűségi változókra.

A több-dimenziós határeloszlások vizsgálatában először definiálnunk kell a több-dimenziós eloszlások konvergenciáját. Ezután meg kell fogalmazni és be kell bizonyítani az eloszlások konvergenciájáról szóló egy-dimenziós eredmények több-dimenziós változatát. Ismertetni fogom a szükséges definiciókat és a megfelelő eredményeket, de a bizonyításokat elhagyom. Ezek az egy-dimenziós eredmények megfelelő módosításával megkaphatóak, csak a jelölésrendszer lesz komplikáltabb.

Több-dimenziós eloszlásfüggvények eloszlásban való konvergenciájának a definiciója. *Legyen $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n=1,2,\dots$, k-dimenziós eloszlásfüggvények sorozata. Azt mondjuk, hogy az $F_n(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy k-dimenziós $F(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvényhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_k)=F(x_1,\dots,x_k)$ az $F(\cdot)$ (határ)eloszlásfüggvény minden $(x_1,\dots,x_k)$ folytonossági pontjában.*

Tétel az eloszlásban való konvergencia jellemzéséről folytonos függvények segítségével. *$F_n(u_1,\dots,u_k)$, $n=1,2,\dots$ k-dimenziós eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u_1,\dots,u_k)$ k-dimenziós eloszlásfüggvényhez, ha minden a k-dimenziós téren értelmezett folytonos, korlátos $g(u_1,\dots,u_k)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty}\int g(u_1,\dots,u_k)\,F_n(\,du_1,\dots,\,du_k)=\int g(u_1,\dots,u_k)\,F(\,du_1,\dots,\,du_k)$$

azonosság.

Az egy-dimenziós határeloszlástétel vizsgálatában fontos szerepet játszott a fenti tétel, illetve a Fourier analízis módszerének alkalmazásával a feladatot jobban tudtuk vizsgálni. Ennek érdekében bevezettük a karakterisztikus függvény fogalmát. A több-dimenziós esetben is célszerű ezt a módszert használni, ezért definiáljuk a több-dimenziós eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényét is.

Több-dimenziós valószínűségi változók karakterisztikus függvényének a definiciója. *Legyen $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós valószínűségi változó valamely $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u_1,\dots,u_k)=P(\xi_1<u_1,\dots,\xi_k<u_k)$, $-\infty<u_j<\infty$, $1\le j\le k$, a $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ véletlen vektor eloszlásfüggvényét. A $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t_1,\dots,t_k)=Ee^{i(t_1\xi_1+\cdots+t_k\xi_k)}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}F(\,du_1,\dots,du_k),$$
$$-\infty<t_j<\infty,\quad 1\le j\le k,$$

függvény. Adva egy $F(u_1,\dots,u_k)$ k-dimenziós eloszlásfüggvény az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét is definiálni fogjuk mint egy F eloszlású $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus *függvényt a $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével ki lehet számolni, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)*

Egy eloszásfüggvényt a több-dimenziós esetben is meghatározza annak karakterisztikus függvénye. Ezt mondja ki a következő tétel.

Tétel. *Legyen $F(x_1, \ldots, x_k)$ és $G(x_1, \ldots, x_k)$ két eloszlásfüggvéy, melyek karakterisztikus függvényei minden pontban megegyeznek. Ekkor $F(x_1, \ldots, x_k) = G(x_1, \ldots, x_k)$ minden k-dimenziós $(x_1, \ldots, x_k)$ vektorra.*

Az egydimenziós esethez hasonlóan a fenti tétel bebizonyítható Weierstrass második approximációs tételének (pontosabban annak több-dimenziós általánosításának) a segítségével. A teljesség kedvéért megfogalmazzuk Weierstrass második approximációs tételének számunkra hasznos több-dimenziós változatát.

Weierstrass második approximációs tételének több-dimenziós változata. *Ha $f(t_1, \ldots, t_k)$ folytonos függvény a k-dimenziós euklideszi térben, mely minden koordinátájában 2π szerint periodikus, azaz $f(t_1 + 2j_1\pi, \ldots, t_k + 2j_k\pi) = f(t_1, \ldots, t_k)$ minden egész $j_1, \ldots j_k$ számra, és $\varepsilon > 0$ valós szám, akkor létezik olyan k változós*

$$P_n(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{(j_1,\ldots,j_k):\ |j_1|+\cdots+|j_k|\le n} a_{j_1,\ldots,j_k} e^{i(j_1t_1+\cdots+j_kt_k)},$$

trigonometrikus polinom, ahol $j_1, \ldots, j_k$ egész számok, melyre

$$|f(t_1, \ldots, t_k) - P_n(t_1, \ldots, t_k)| < \varepsilon \quad \text{minden valós } t_1, \ldots, t_k \text{ számra.}$$

A több-dimenziós karakterisztikus függényekre is érvényes a karakterisztikus függvények folytonosságát kifejező alábbi eredmény:

Lemma. *Egy $F(x_1, \ldots, x_k)$ k-változós eloszlásfüggvény*

$$\varphi(t_1, \ldots, t_k) = \int e^{t_1x_1+\cdots+t_kx_k} F(\,dx_1, \ldots, \,dx_k)$$

karakterisztikus függvénye folytonos minden $(t_1, \ldots, t_k)$ pontban.

A fenti lemma bizonyítása hasonló az egy-dimenziós esethez.

Megfogalmazzuk az eloszlásfüggvények és azok karakterisztikus függvényei konvergenciája közötti kapcsolatot leíró Alaptételnek nevezett állítás több-dimenziós változatát.

Az eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel több-dimenziós változata. *Legyen $F_n(u_1, \ldots, u_k)$, $-\infty < u_j < \infty$, $1 \le j \le k$, k-dimenziós eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t_1, \ldots, t_k) = \int e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)} F_n(\,du_1, \ldots, \,du_k)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \ldots$. Ha a $\varphi_0(t_1, \ldots, t_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t_1, \ldots, t_k)$ határérték létezik* *minden* $-\infty < t_j < \infty$, $1 \le j \le k$, *számra, és a* $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ *limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan* $F_0(u_1,\dots,u_k)$ *eloszlásfüggvény a* k*-dimenziós térben, melynek a* $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ *függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az* $F_n(u_1,\dots,u_k)$ *eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az* $F_0(u_1,\dots,u_k)$ *eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $n=1,2,\dots$, *eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, mely egy* $F_0(u_1,\dots,u_k)$ *eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban,* $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$, $n=1,2,\dots$, *jelöli az* $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ *pedig az* $F_0(u_1,\dots,u_k)$ *eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor* $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ *minden* $-\infty < t_j < \infty$, $1 \le j \le k$, *számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden korlátos halmazon.*

Érdemes kimondani a fenti Alaptétel alábbi következményét.

Az Alaptétel következménye. *Az* $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n=1,2,\dots$, k*-dimenziós eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy* $F(x_1,\dots,x_k)$ *eloszláshoz, ha az* F_n *eloszlásfüggvények*

$$\varphi_n(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}F_n(\,dx_1,\dots,\,dx_k)$$

karakterisztikus függvényei konvergálnak az F *eloszlásfüggvény*

$$\varphi(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}F(\,dx_1,\dots,\,dx_k)$$

karakterisztikus függvényhez minden $(t_1,\dots,t_k)$ *pontban.*

A fenti Alaptétel egy-dimenziós változatának bizonyításában fontos szerepet játszott eloszlások relatív kompaktságának a fogalma, és egy olyan eredményre, mely ennek megadta ennek szükséges és elégséges feltételét. Ismertetem az itt megfogalmazott fogalmak és eredmények több-dimenziós változatát.

Eloszlások relatív kompaktságának és feszességének definiciója. *Legyen adva* $F_n(t_1,\dots,t_k)$, $n=1,2,\dots$, *eloszlásfüggvényeknek sorozata a* k*-dimenziós euklideszi térben, és jelölje* μ_n *az* F_n *eloszlásfüggvény által meghatározott valószínűségi mértéket az* R^k *térben. Azt mondjuk, hogy az* F_n *eloszlásfüggvények illetve* μ_n *valószínűségi mértékek sorozata relatív kompakt, ha az* F_n *(vagy* μ_n*) sorozat tetszőleges* F_{n_k} *(illetve* μ_{n_k}*) részsorozatának* $k=1,2,\dots$, *létezik* $F_{n_{k_j}}$ *(illetve* $\mu_{n_{k_j}}$*),* $j=1,2,\dots$, *eloszlásban konvergens részsorozata.*

Azt mondjuk, hogy az F_n *eloszlásfüggvények (illetve az általuk meghatározott* μ_n *valószínűségi mértékek) sorozata feszes, ha tetszőleges* $\varepsilon>0$ *számra létezik olyan* $K=K(\varepsilon)$ *szám, hogy a* $\mathbf{K}(K)^k=\underbrace{[-K,K]\times\cdots\times[-K,K]}_{k\text{-szoros szorzat}}$ k*-dimenziós kockára*

$$\mu_n(\mathbf{K}(K)^k)\ge 1-\varepsilon \quad \text{minden } n=1,2,\dots \textit{ indexre.}$$

Tétel. *Legyen μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek sorozata az az R^k k-dimenziós euklideszi téren. Ez a valószínűségi mértékekből álló sorozat akkor és csak akkor relatív kompakt, ha feszes. Speciálisan valószínűségi mértékek eloszlásban konvergens sorozata feszes.*

Az Alaptétel bizonyításának egy-dimenziós változatának bizonyításának egyik fontos lépése volt annak az ötödik előadás 2. Lemmájában megfogalmazott eredménynek bizonyítása, mely szerint amennyiben eloszlásfüggvények egy sorozata a nulla egy kis környezetében konvergál egy a nullában folytonos függvényhez, akkor az eloszlásfüggvények feszesek, ezért relatív kompaktak. Ez az állítás érvényes több-dimenziós eloszlásokra is. Ennek bizonyítása nem is igényel nagy erőfeszítést. Összehasonlítva az egy-dimenziós és több-dimenziós mértékek feszességét, a több-dimenziós eset visszavezethető az egy-dimenziósra. Azt kell megérteni, hogy több-dimenziós eloszlások sorozata akkor és csak akkor feszes, ha az összes koordinátára vett egy-dimenziós vetületük feszes.

A fenti eredmények segítségével az egy-dimenziós eset bizonyításához hasonlóan be lehet bizonyítani az Alaptétel több-dimenziós változatát is. Ez azt jelenti, hogy több-dimenziós határeloszlástételek például a később megfogalmazandó több-dimenziós centrális határeloszlástétel bizonyítását az egy-dimenziós esethez hasonlóan vissza lehet vezetni az eloszlások karakterisztikus függvények vizsgálatára. Sőt, az Alaptétel azt is lehetővé teszi, hogy a több-dimenziós határeloszlástételek bizonyítását visszavezessük az egy-dimenziós esetre. Ez a tartalma a következő tételnek.

Tétel. *Legyen $\mathbf{Z}_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{m,n})$, $n = 1, 2, \dots$, m-dimenziós valószínűségi vektorok sorozata. A $\mathbf{Z}_n$ valószínűségi vektorok akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban egy m-dimenziós $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)$ véletlen vektor eloszlásához $n \to \infty$ esetén, ha tetszőleges valós $a_1, \dots, a_m$ számokra a $Z_n = Z_n(a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=1}^{m} a_j Z_{j,n}$, $n = 1, 2, \dots$, egydimenziós valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak $n \to \infty$ esetén a $Z = Z(a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=1}^{m} a_j Z_j$ valószínűségi változó eloszlásához.*

Bizonyítás: Az Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel alapján láthatjuk, hogy a $\mathbf{Z}_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{m,n})$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi vektorok akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban a $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)$ véletlen vektor eloszlásához, ha ezek $\varphi_n(t_1, \dots, t_m) = Ee^{it_1 Z_{1,n} + \cdots + t_m Z_{m,n}}$ karakterisztikus függvényei konvergálnak a Z véletlen vektor $\varphi(t_1, \dots, t_m) = Ee^{it_1 Z_1 + \cdots + t_m Z_m}$ karakterisztikus függvényhez $n \to \infty$ esetén. Ha tudjuk, hogy az egy-dimenziós lineáris kombinációk konvergálnak, akkor $a_1 = t_1$, $\dots$, $a_m = t_m$ választással, és felhasználva, hogy az 1-dimenziós eloszlások konvergenciájából következik az is, hogy hogy a lineáris kombinációk karakterisztikus függvényei konvergálnak a $t = 1$ pontban, kapjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t_1, \dots, t_m) = \varphi(t_1, \dots, t_m).$$

Ez minden $(t_1, \dots, t_n)$ pontban elmondható, ezért a $\mathbf{Z}_n$ vektorok eloszlásban konvergálnak a $\mathbf{Z}$ vektorhoz.

Megfordítva, ha a $\mathbf{Z}_n$ vektorok eloszlásban konvergálnak a $\mathbf{Z}$ vektorhoz, akkor átfogalmazva ezt a tényt a karakterisztikus függvények nyelvére, azt kapjuk, tetszőleges $(a_1, \dots, a_m)$ vektorra és minden t valós számra $(t_1, \dots, t_m) = (a_1 t, \dots, a_m t)$ választással, hogy a $\varphi_n(a_1 t, \dots, a_m t) = Ee^{it(a_1 Z_{1,n} + \cdots + a_m Z_{m,n}}$ karakterisztikus függvények konvergálnak a $\varphi(a_1 t, \dots, a_m t) = Ee^{it(a_1 Z_1 + \cdots + a_m Z_m}$ karakterisztikus függvényhez, ha $n \to \infty$. Ezért a $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j Z_{j,n}$, $n = 1, 2, \dots$, egydimenziós valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j Z_j$ valószínűségi változó eloszlásához.

Bár a következő állítást implicit módon tartalmazza az előző tétel, mégis érdemes külön kimondani.

Tétel. *Legyen $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)$, $n = 1, 2, \dots$, m-dimenziós valószínűségi vektor. Tekintsük tetszőleges valós $a_1, \dots, a_m$ számokra az $Z = Z(a_1, \dots, a_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j Z_j$ valószínűségi változót. A $\mathbf{Z}$ valószínűségi vektor eloszlását meghatározza az összes $Z = Z(a_1, \dots, a_m)$ egydimenziós valószínűségi változó eloszlása.*

Bizonyítás: A $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)$ véletlen vektor eloszlását meghatározza annak karakterisztikus függvénye. Viszont e véletlen vektor $E^{i(t_1 Z_1 + \cdots + t_m Z_m)}$ karakterisztikus függvénye megegyezik a $Z(t_1, \dots, t_m)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényével az 1 pontban. Tehát a $\mathbf{Z}$ véletlen vektor karakterisztikus függvényét meghatározzák a tételben tekintett egydimenziós valószínűségi változók eloszlásai.

Ezen eredmények segítségével nem nehéz bebizonyítani a több-dimenziós centrális határeloszlástételt. Ehhez előbb természetesen definiálni kell a határeloszlásban megjelenő több-dimenziós normális eloszlást. Bár ezután rögtön rátérhetnénk a tétel bizonyítására, mégis célszerűnek látszik előtte a több-dimenziós normális eloszlás néhány tulajdonságát megfogalmazni, melyek érthetőbbé teszik a több-dimenziós centrális határeloszlástétel álítását. A több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságainak bizonyításához nagyon hasznos a több-dimenziós normális eloszlás karakterisztikus függvényének a kiszámítása. A több-dimenziós normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét kifejező formulát, melynek bizonyítása nem lesz nehéz külön tételben fogjuk megfogalmazni.

Több-dimenziós normális eloszlások definiciója. *Definiáljuk először a több-dimenziós standard normális eloszlást. Azt mondjuk, hogy egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlása a k-dimenziós standard normális eloszlás, ha a $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyik ξ_j valószínűségi változó, $1 \le j \le k$, standard normális eloszlású. Ekvivalens megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlása a k-dimenziós standard normális eloszlás, ha e véletlen vektornak létezik sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_k) = \dfrac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{ -\dfrac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{k} u_j^2 \right\}$ függvény.*

Egy $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ k dimenziós véletlen vektor k dimenziós normális eloszlású vektor nulla várható értékkel, ha e véletlen vektor eloszlása megegyezik valamely $(\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_k) =$

$(\xi_1, \dots, \xi_k)A$ k-dimenziós vektor eloszlásával, ahol A egy $k \times k$ méretű mátrix, továbbá $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor.

Egy $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ véletlen vektor k-dimenziós normális eloszlású vektor, ha eloszlása megegyezik egy $(\eta_1, \dots, \eta_k) + (m_1, \dots, m_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ahol $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ egy k-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, melynek a várható értéke nulla, és $(m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós determinisztikus vektor.

Tekintsünk egy $\xi A + m$ több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi véletlen vektort, ahol $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy k-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi vektor A egy $k \times k$ méretű mátrix és $m = (m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós vektor. Ennek a véletlen vektornak a várható értéke m, kovariancia-mátrixa pedig $D = A^*A$. Ez utóbbi formula következik a 7. előadáson megfogalmazott és bebizonyított tételből a kovariancia mátrixok jellemzéséről. Most kiszámítjuk a több-dimenziós normális eloszlás karakterisztikus függvényét.

Tétel a több-dimenziós normális eloszású valószínűségi változók karakterisztikus függvényéről. *Legyen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)A + (m_1, \dots, m_k)$ egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, ahol $m = (m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós (determinisztikus) vektor, $A = (a_{j,l})$, $1 \le j, l \le k$, $k \times k$ méretű mátrix, továbbá $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor. Ekkor az $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye a*

$$Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t_1\eta_1 + \cdots + t_k\eta_k)} = e^{i(t,m) - tA^*At^*/2} = \exp\left\{ i\sum_{j=1}^k t_j m_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k d_{j,l} t_j t_l \right\}$$

függvény, ahol (x, y) jelöli az $x = (x_1, \dots, x_k)$ és $y = (y_1, \dots, y_k)$ vektorok $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^k x_j y_j$ skalárszorzatát, $t = (t_1, \dots, t_k)$, $d_{j,l}$ az A^*A kovariancia mátrixának j-ik sorában, és l-ik oszlopában szereplő konstans. A $D = A^*A$ mátrix megegyezik az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ véletlen vektor kovariancia mátrixával.

Bizonyítás:

$$Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t,A\xi+m)} = e^{i(t,m)}Ee^{i(tA^*,\xi)} = e^{i(t,m)}e^{-tA^*At^*/2} = e^{i(t,m)-tA^*At^*/2},$$

mert, ha $tA^* = \bar{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k)$, akkor $Ee^{i(tA^*,\xi)} = Ee^{i(\bar{t}_1\xi_1 + \cdots + \bar{t}_k\xi_k)} = \prod\limits_{j=1}^k Ee^{i\bar{t}_j\xi_j} = \prod\limits_{j=1}^k e^{-\bar{t}_j^2/2} = e^{-(\bar{t},\bar{t})/2} = e^{-(tA^*,tA^*)/2} = e^{-tA^*At^*/2}$. A fenti számolásban kihasználtuk azti is, hogy egy ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye egy s pontban az $Ee^{is\xi} = e^{-s^2/2}$ függvény.

Továbbá, mint azt a Tétel kimondása előtt megjegyeztük, az exponensben szereplő A^*A mátrix az η vektor D kovariancia mátrixa.

Vegyük észre, hogy a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye csak a normális eloszlás várható érték vektorától és kovariancia mátrixától függ. Továbbá, mivel a karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlásfüggvényt. Ezért az előző tételnek érvényes az alábbi következménye.

Következmény. *Egy több-dimenziós normális eloszlást egyértelműen meghatároz annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa.*

Értsük meg a Következmény tartalmát és jelentőségét. Tekintsünk két különböző A és B mátrixot, melyekre $A^*A = B^*B = D$ (láttuk, hogy lehetséges megadni különböző A és B mátrixot, melyek teljesítik ezt az azonosságot) valamint egy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy standard normális eloszlású véletlen vektort, és definiáljuk az $\eta_1 = \xi A + m$, $\eta_2 = \xi B + m$ normális eloszlású véletlen vektort valamely determinisztikus vektorral. Formálisan a két η_1 és η_2 véletlen vektor különböző, ennek ellenére eloszlásuk megegyezik a Következmény állítása szerint. Ugyanis a két normális eloszlású véletlen vektor m várható értéke és $D = A^*A = B^*B$ kovariancia mátrixa megegyezik. Ez azért is fontos, mert a több-dimenziós centrális határeloszlástételben a normális határeloszlást a várható érték és kovariancia mátrix segítségével adtuk meg. Ahhoz, hogy lássuk azt, hogy ez értelmes tudnunk kell, hogy a több-dimenziós normális eloszlást meghatározza annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa. Ezt mondja ki az előbb megfogalmazott Következmény. (Ez a probléma az egy-dimenziós esetben azért nem jelent meg, mert ott a szükséges állítás könnyen látható.)