A Valószínűségszámítás II. előadássorozat kilencedik előadása.

2002. november 12.

Határeloszlástételek független vektor értékű valószínűségi változókra, és a több-dimenziós normális eloszlás néhány fontos tulajdonsága.

A korábbi előkészítés után nem nehéz megfogalmazni és bebizonyítani a centrális határeloszlástétel több-dimenziós változatát. Ezt csak független és egyforma eloszlású véletlen vektorok összegére tesszük meg, bár nem lenne nehéz a Lindeberg feltételt teljsítő szériasorozatokra megfogalmazott centrális határeloszlástételnek a több-dimenziós változatát bebizonyítani.

A több-dimenziós centrális határeloszlástétel. *Legyenek* $\xi^{(j)}=\left(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_k^{(j)}\right)$, $j=1,2,\dots$, *független, egyforma eloszlású k-dimenziós valószínűségi változók, melyekre teljesül az* $E{\xi_l^{(1)}}^2<\infty$, $1\le l\le k$ *feltétel. Legyen a* $\xi^{(1)}=\left(\xi_1^{(1)},\dots,\xi_k^{(1)}\right)$ *vektor várható értéke* $E\xi^{(1)}=\left(E\xi_1^{(1)},\dots,E\xi_k^{(1)}\right)$, *kovariancia mátrixa pedig egy* $D=(d_{j,l})$, $d_{j,l}=\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_l)$, $1\le j,l\le k$, $k\times k$ *méretű mátrix. Definiáljuk az* $S^{(n)}=\left(S_1^{(n)},\dots,S_k^{(n)}\right)=\sum\limits_{j=1}^n\xi^{(j)}=\left(\sum\limits_{j=1}^n\xi_1^{(j)},\dots,\sum\limits_{j=1}^n\xi_k^{(j)}\right)$ *összegeket,* $n=1,2,\dots$. *Ekkor minden* $(x_1,\dots,x_k)$ *k-dimenziós vektorra érvényes a*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac1{\sqrt n}\left(S_1^{(n)}-ES_1^{(n)}\right)<x_1,\dots,\frac1{\sqrt n}\left(S_k^{(n)}-ES_k^{(n)}\right)<x_k\right)=\Phi_D(x_1,\dots,x_k)$$

azonosság, ahol $\Phi_D(x_1,\dots,x_k)$ *a k-dimenziós nulla várható értékű D kovariancia mátrixú normális eloszlásfüggvény értéke az* $(x_1,\dots,x_k)$ *pontban.*

Megjegyzés: Láttuk, hogy egy tetszőleges véletlen vektor kovariancia mátrixa szimmetrikus pozitív szemidefinit mátix, és minden ilyen mátrixra létezik nulla várható értékű és ilyen kovariancia mátrixú normális eloszlású véletlen vektor. Továbbá egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározza annak várható értéke és kovariancia mátrixa. Ez többek között azt jelenti, hogy a több-dimenziós centrális határeloszlástételben szereplő határeloszlást egyértelműen megadtuk.

A tétel bizonyítása. Jelöljön $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ egy nulla várható értékű és D kovariancia mátrixú normális eloszlású véletlen vektort. Azt kell belátnunk, hogy a

$$\left(\frac1{\sqrt n}\left(S_1^{(n)}-ES_1^{(n)}\right),\dots,\frac1{\sqrt n}\left(S_k^{(n)}-ES_k^{(n)}\right)\right)$$

véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak az $(\eta_1,\dots,\eta_k)$ véletlen vektorhoz. Ehhez viszont, mint láttuk elég azt megmutatni, hogy tetszőleges $a_1,\dots,a_k$ valós számokra a $\frac1{\sqrt n}\sum\limits_{j=1}^n a_j\left(S_j^{(n)}-ES_j^{(n)}\right)$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a $\sum\limits_{j=1}^n a_j\eta_j$

valószínűségi változókhoz. Viszont $\sum_{j=1}^{k} a_j\eta_j$ normális eloszlású valósszínűségi változó nulla várható értékkel és aDa^* szórásnégyzettel, ahol $a = (a_1, \dots, a_k)$. (Ez legegyszerűbben úgy látható, ha felírjuk a $\sum_{j=1}^{k} a_j\eta_j$ véletlen vektor $E\exp\left\{it\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\eta_j\right)\right\} = \exp\left\{\left(-\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_j\eta_j\right)\right\} = e^{-aDa^*t^2/2}$ karakterisztikus függvényét.) Másrészt

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\left(S_j^{(n)} - ES_j^{(n)}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\zeta_j,$$

ahol $\zeta_j = \sum_{j=1}^{k} a_j(\zeta_j - E\zeta_j)$, $1 \le j \le n$. Vegyük észre továbbá, hogy a ζ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók független egyforma eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel és $\operatorname{Var}\zeta_j = aDa^*$ szórásnégyzettel, mely szám megegyezik az $\eta = \sum_{j=1}^{k} a_j\eta_j$ nulla várható értékű és normális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzetével. Tehát elegendő belátni, hogy a $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\zeta_j$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy nulla várható értékű és $\operatorname{Var}\zeta_j$ szórásnégyzetű normális eloszláaú valószínűségi változóhoz. Viszont ezt az állítást mondja ki az egy-dimenziós centrális határeloszlástétel.

Megadtuk a több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényét. Ezt fogalmazzuk meg a következő állításban.

Több-dimenziós normális eloszlás karakterisztikus függvényének jellemzése. *Egy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a következő alakú:*

$$Ee^{i(t,\xi)} = Ee^{i(t_1\xi_1 + \dots + t_k\xi_k)} = e^{i(m,t) - tDt^*/2},$$

ahol $m = (m_1, \dots, m_k)$ a ξ vektor várható értéke, $D = (d_{j,l})$ pedig az ξ vektor kovariancia mátrixa, azaz $m_j = E\xi_j$, $1 \le j \le k$, $d_{j,l} = \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_l)$, $1 \le j, l \le k$. (A $t = (t_1, \dots, t_k)$ jelölést használjuk, t^* jelöli a t vektor transzponáltját, és ha $a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_k)$ két k-dimenziós vektor, akkor $(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb)k$ jelöli a két vektor skalár-szorzatát.

Ennek az állításnak van néhány fontos következménye, melyeket érdemes külön kimondani. Az első következményt lényegében megfogalmaztam (és megindokoltam) az előző előadáson.

Első következmény. *Egy több-dimenziós normális eloszlást egyértelműen meghatároz várható érték vektora és kovariancia mátrixa. Egy k dimenziós m vektorhoz és D $k \times k$ méretű mátrixhoz akkor és csak akkor létezik olyan k-dimenziós normális eloszlású* *véletlen vektor, melynek ez a várható értéke és kovariancia mátrixa, ha a D mátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit.*

2. következmény. *Legyen (ξ, η) két-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Ha a ξ és η valószínűségi változók korrelálatlanok, azaz* $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = 0$*, akkor ξ és η független valószínűségi változó. Általánosabban, legyen $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melyre igaz, hogy valamilyen j, indexre, $1 \le j < k$, az első j és utolsó $k - j$ koordináták korrelálatlanok, azaz* $\mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q) = 0$*, ha $1 \le p \le j < q \le k$. Ekkor a $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ és $(\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ véletlen vektorok független j és $k - j$-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változók.*

Megjegyzés. Láttuk, hogy független valószínűségi változók korrelálatlanok, de ennek az állításnak a megfordítása általában nem igaz, azaz léteznek olyan korrelálatlan valószínűségi változók, melyek nem függetlenek. Az előbb megfogalmazott következmény viszont azt a figyelemreméltó és a matematikai statisztika vizsgálataiban fontos állítást fogalmazza meg, mely szerint abban a speciális esetben, ha egy normális eloszlású véletlen vektor koordinátáit tekintjük, akkor a koordináták korrelálalatlanságából azok függetlensége is következik. Sőt érvényes ennek az állításnak több-dimenziós megfelelője is, mely szerint ez az állítás a normális eloszlású véletlen vektor több-dimenziós értékű koordinátáira is érvényes.

Bizonyítás. Írjuk fel a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor kovariancia mátrixát és karakterisztikus függvényét. A k dimenziós vektor $k \times k$ méretű D kovariancia mátrixa $D = \begin{pmatrix} D_1, 0 \\ 0\,, D_2 \end{pmatrix}$ alakú, ahol $D_1 = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = \mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q)$, $1 \le p, q \le j$, a $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ véletlen vektor $D_2 = (\bar{d}_{p,q})$, $\bar{d}_{p,q} = \mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q)$, $j + 1 \le p, q \le k$, a $(\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor kovariancia mátrixa, a D mátrix előállításában szereplő két nulla egy $j \times (k - j)$ méretű és $(k - j) \times j$ méretű csupa nullából álló mátrixot jelöl. Tekintsünk egy $t = (t_1, \dots, t_k)$ k-dimenziós véletlen vektort, és vezessük be a $t^{(1)} = (t_1, \dots, t_j)$ és $t^{(2)} = (t_{j+1}, \dots, t_k)$ illetve $m = (E\xi_1, \dots, E\xi_k)$, és $m^{(1)} = (E\xi_1, \dots, E\xi_j)$, $m^{(2)} = (E\xi_{j+1}, \dots, E\xi_k)$ jelöléseket is. Ekkor $i(m, t) - tDt^*/2 = i(m^{(1)}, t^{(1)}) - t^{(1)} D_1 t^{(1)^*}/2 + i(m^{(2)}, t^{(2)}) - t^{(2)} D_1 t^{(2)^*}/2$. Ezért

$$Ee^{it_1\xi_1 + \cdots t_k\xi_k} = e^{i(m,t) - tDt^*} = e^{i(m^{(1)}, t^{(1)}) - t^{(1)} D_1 t^{(1)^*}} \cdot e^{i(m^{(2)}, t^{(2)}) - t^{(2)} D_1 t^{(2)^*}}.$$

Ez azt jelenti, hogy amennyiben veszünk két független a $(\xi_1, \dots, \xi_j)$ illetve $(\xi_{j+1}, \dots, \xi_k)$ véletlen vektorral megegyező független valószínűségi változókat, akkor ezek együttesének karakterisztikus függvénye megegyezik a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor karaktetisztikus függvényével. Mivel a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást, innen következik a 2. következményben megfogalmazott állítás.

3. következmény *Ha $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor A tetszőleges $k \times p$ méretű mátrix valamely p egész számmal, akkor $\eta = \xi A$ p-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor.*

Bizonyítás: Számítsuk ki a ξA véletlen vektor karakterisztikus függvényét. Jelölje D a ξ vektor kovariancia mátrixát, n a várható érték vektorát. Tetszőleges t p-dimenziós vektorra

$$Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{(it,\xi A)} = Ee^{i(tA^*,\xi)} = e^{i(tA^*,m)-(tA^*D(tA^*)^*/2} = e^{i(t,\bar{m})-(t,\bar{D}t)/2}$$

$\bar{m} = mA$, $\bar{D} = A^*DA$ választással. Ez azt jelenti, hogy η normális eloszlású $\bar{m}$ várható értékkel és $\bar{D}$ kovariancia mátrix-szal.

4. következmény. *A $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha tetszőleges $a_1, \dots, a_k$ számokra a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ lineáris kombináció normális eloszlású.*

Bizonyítás. A normális eloszlás karakterisztikus függvényének alakjából látható, hogy a $\sum\limits_{p=1}^{k} a_p\xi_p$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye,

$$E\exp\left\{it\sum_{p=1}^{k} a_p\xi_p\right\} = e^{itm(a_1,\dots,a_k)-t^2aDa^*/2},$$

ahol $m(a_1, \dots, a_k) = \sum\limits_{p=1}^{k} a_pE\xi_p$, $a = (a_1, \dots, a_k)$ és D a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ vektor kovariancia mátrixa. Ez egy normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.

Megfordítva, ha a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor tetszőleges lineaáris kombinációja normális eloszlásaú, akkor speciálisan igaz az is, hogy mindegyik ξ_p, $1 \le p \le k$, valószínűségi változónak létezik $E\xi_p = m_p$ várható értéke, és $E\xi_p^2$ második momentuma. Jelölje $D = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = \mathrm{Cov}\,(\xi_p, \xi_q)$, a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor kovariancia mátrixát, $m = (E\xi_1, \dots, \xi_k)$ annak várható értékét. Ekkor tetszőleges $t_1, \dots, t_k$ valós számokra a $\sum\limits_{p=1}^{k} t_p\xi_p$ normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke (t, m) és szórásnégyzete tDt^*, ahol a $t = (t_1, \dots, t_k)$ jelölést használjuk. Ezért karakterisztikus függvénye az $E\exp\left\{iu\sum\limits_{p=1}^{k} t_p\xi_p\right\} = e^{iu(t,m)-u^2tDt^*/2}$ függvény. Innen $u = 1$ helyettesítéssel és tetszőleges $(t_1, \dots, t_k)$ vektorra azt kapjuk, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye egy normális eloszlású véletlen vektor karakterisztikus függvénye.

5. következmény. *Ha $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ két független normális eloszlású véletlen vektor, akkor a $\xi + \eta$ véletlen vektor is normális eloszlású.*

Bizonyítás. A több-dimenziós valószínűségi változók esetében is be lehet vezetni a konvoluciót, és annak segítségével bebizonyítani az állítást de egyszerűbb a karakterisztikus függvényekkel dolgozni. Ha ξ kovariancia mátrixa D_1 várható érték vektora m_1, η kovariancia mátrixa D_2 várható érték vektora m_2, akkor valamely $t = (t_1, \dots, t_k)$ pontban ξ karakterisztikus függvénye $Ee^{i(t,\xi)} = e^{i(m,t)-tD_1t^*/2}$ η karakterisztikus függvénye $Ee^{i(t,\eta)} = e^{i(m_2,t)-tD_2t^*/2}$, $\xi + \eta$ karakterisztikus függvénye pedig

$Ee^{i(t,\xi+\eta)} = Ee^{i(t,\xi)} \cdot Ee^{i(t,\eta)} = e^{i(t,m_1+m_2)-t(D_1+D_2)t^*/2}$. Innen látható, hogy $\xi+\eta$ normális eloszlású véletlen vektor m_1+m_2 várható értékkel és D_1+D_2 covariancia mátrix-szal.

6. következmény. *Ha (ξ,η) két-dimenziós normális véletlen vektor,* $\operatorname{Var}\eta > 0$ *akkor a ξ válaszínűségi változó felírható $\xi = a\eta+\zeta$ alakban, ahol a alkalmas valós szám ζ pedig egy η-tól független normális eloszlású valószínűségi változó. Általánosabban, ha $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_j)$, és $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$ két olyan normális eloszlású véletlen vektor, melyekre a $(\xi,\eta)=(\xi_1,\dots,\xi_j,\eta_1,\dots,\eta_k)$ véletlen vektor is normális eloszlású, és az η véletlen vektor kovariancia mátrixa invertálható, akkor létezik olyan A $j\times k$ méretű mátrix, melyre a $\xi-\eta A$ véletlen vektor a ξ véletlen vektortól független normális eloszlású vektor.*

Megjegyzés. A fenti állítás azt mondja ki, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor bizonyos komponensei kifejezhetőek, mint a többi komponens lineáris transzformációja plusz az ezen komponensektől független normális vektor. Ez a tény fontos szerepet játszik bizonyos statisztikai vizsgálatokban. Ugyanis bevezették a feltételes valószínűség és feltételes eloszlás fogalmát az általános esetben is, és bizonyos feladatokban szeretnénk azt kiszámolni. A fenti eredmény teszi lehetővé, hogy normális eloszlású véletlen vektorok esetében ezt a feladatot viszonylag egyszerűen megoldhassuk. Megjegyezzük, hogy az 5. következményben is fontos szerepet játszik az, hogy normális eloszlású véletlen vektorokkal dolgozunk. Ekkor ugyanis a 2. következmény alapján a függetlenség bizonyításhoz elegendő a korrelálatlanságot ellenőrizni.

Bizonyítáas. Írjuk fel a $\xi = a\eta+(\xi-a\eta)$ azonosságot valamely a valós számmal, és legyen $\zeta=\xi-a\eta$. Ekkor (ξ,ζ) egy normális vektor lineáris transzformáltja, ezért a 3. következmény szerint maga is normális eloszlású. Ezért a 2. következmény szerint, η és ζ függetlenek, ha az a számot úgy választjuk, hogy $\operatorname{Cov}(\eta,\zeta)=0$. Ezt meg tudjuk tenni az $a=\dfrac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\operatorname{Var}\eta}$ választással. Ekkor ugyanis $\operatorname{Cov}(\zeta,\eta)=\operatorname{Cov}(\xi,\eta)-a\operatorname{Var}\xi=0$.

Az általános esetben is elegendő belátni, hogy létezik olyan A $j\times k$ méretű mátrix, melyre a $\xi-\eta A$ vektor az η vektor minden koordinátája és a $\xi-\eta A$ véletlen vektor minden koordinátája korrelálatlan. Sőt, redukálhatjuk a feladatot arra az egyszerűbb speciális esetre is, amikor az η vektor kovariancia függvénye az identitás mátrix. Valóban, ha az η kovariancia mátrixa D, akkor az $\bar\eta=\eta D^{-1/2}$ kovariancia mátrixa, $D^{-1/2}DD^{-1/2}=I$, és ha $\bar\eta$ koordinátái valamint a $\xi-\bar\eta A$ koordrinátái korrelálatlanok, akkor ugyanez igaz a $\xi-\eta D^{-1/2}A$ és $\eta=D^{1/2}\bar\eta$ koordinátára is. Ezért feltehetjük, hogy η kovariancia mátrixa az identitás.

Legyen ezután $\zeta_l=\xi_l-\sum\limits_{p=1}^{k}\operatorname{Cov}(\xi_l,\eta_p)\eta_p$, $1\le l\le k$. Ekkor $\operatorname{Cov}(\zeta_l,\eta_m)= E(\xi_l,\eta_m)-\operatorname{Cov}(\xi_l,\eta_m)\operatorname{Var}\eta_m^2=0$ minden $1\le l,m\le k$ számra, ahonnan következik a kívánt állítás.

Befejezésül kiszámítjuk a több-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényét.

Tétel a több-dimenziós normális eloszlásfüggvények sűrűségfüggvényének az alakjáról. *Legyen adva egy* $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$ *k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek* $m=(m_1,\dots,m_k)=(E\eta_1,\dots,E\eta_k)$ *a várható értéke és* $D=(d_{j,l})$, $d_{j,l}=\operatorname{Cov}(\eta_j,\eta_l)$, $1\le j,l\le k$, *a kovariancia mátrixa. Az* η *k-dimenziós valószínűségi változónak akkor és csak akkor van sűrűségfüggvénye, ha a* D *kovariancia mátrix invertálható. Ha a* D *kovariancia mátrix invertálható, akkor az* $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$ *véletlen vektor sűrűségfüggvénye az a következő alakú:*

$$f(x)=f(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}\det D^{1/2}}\exp\left\{-(x-m)D^{-1}(x-m)^*/2\right\},$$

ahol $x=(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ *k-dimenziós vektor.*

Bizonyítás: Az $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_k)$ véletlen vektor eloszlása megegyezik egy olyan $\bar\eta=(\bar\eta_1,\dots,\bar\eta_k)=(\xi_1,\dots,\xi_k)A+(m_1,\dots,m_k)$ véletlen vektornak az eloszlásával, amelyikre ξ_j, $1\le j\le k$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és $D=A^*A$. Jegyezzük meg, hogy a lineáris algebra standard eredményei szerint az A és A^* mátrixok egyszerre invertálhatóak vagy nem invertálhatóak, és a $D=A^*A$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha az A mátrix invertálható. Ezért, ha a D mátrix nem invertálható, akkor az η vektornak nincs sűrűségfüggvénye, ha pedig a D mátrix invertálható, akkor a következő módon számolhatunk:

Alkalmazva az $x=yA+m$ transzformációt $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$, $x=(x_1,\dots,x_k)$, $y=(y_1,\dots,y_k)$ és $\varphi(y)=\varphi(y_1,\dots,y_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}e^{-(y_1^2+\cdots+y_k^2)/2}$ jelöléssel kapjuk, hogy tetszőleges mérhető $B\subset R^k$ halmazra

$$\begin{aligned}P(\bar\eta\in B)=P(\eta\in B)=P\left(\xi\in(B-m)A^{-1}\right)&=\int_{(y_1,\dots,y_k)\in(B-m)A^{-1}}\varphi(y)\,dy\\ &=\frac{1}{|\det A|}\int_{(x_1,\dots,x_k)\in B}\varphi\left((x-M)A^{-1}\right)\,dx\end{aligned}$$

alakú, ahol $|\det A|$ az $x=yA+M$ leképezés Jacobian-ja.

E formulából kiolvasható, hogy a vizsgált normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $\frac{1}{|\det A|}\varphi\left((x-m)A^{-1}\right)$ függvény. Annak érdekében, hogy bebizonyítsuk a tételt vegyük észre, hogy mivel $D=A^*A$, ezért $\det D=\det A^*\det A=(\det A)^2$, ezért $|\det A|=\det D^{1/2}$, és

$$\begin{aligned}\varphi\left((x-m)A^{-1}\right)&=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\exp\left\{-\frac{((x-m)A^{-1},(x-m)A^{-1})}{2}\right\}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\exp\left\{-\frac{(x-m)A^{-1}\left(A^{-1}\right)^*(x-m)^*}{2}\right\}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\exp\left\{-\frac{(x-m)(A^*A)^{-1}(x-m)^*}{2}\right\}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\exp\left\{-\frac{(x-m)D^{-1}(x-m)^*}{2}\right\},\end{aligned}$$

mert $A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{*} = A^{-1}\left(A^{*}\right)^{-1} = \left(A^{*}A\right)^{-1}$. Innen következik a Tétel állítása.

1. megjegyzés: Láttuk, hogy egy $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ véletlen vektor kovarianciamátrixa akkor és csak akkor szemidefinit (és nem szigorúan pozitív definit), ami ekvivalens azzal, hogy $\det D = 0$, ha a $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ véletlen vektor valamilyen $\sum_{j=1}^{k} a_j \xi_j = \text{const.}$ hipersíkon van egy valószínűséggel. Az nyílvánvaló, hogy amennyiben a normális eloszlásfüggvény ilyen, akkor nincs sűrűségfüggvénye. A fenti tétel viszont azt (is) állítja, hogy amennyiben $\det D \neq 0$, akkor a normális eloszlású véletlen vektornak létezik sűrűségfüggvénye.

2. megjegyzés: Egy több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényét megadó képletben a kovariancia mátrix szerepel, míg a sűrűségfüggvényét megadó képletben a kovariancia mátrix inverze. Mivel a karakterisztikus függvény kiszámításában nem kellett invertálni a kovariancia mátrixot, ezért a karakterisztikus függvény segítségével könnyebb vizsgálni a normális eloszlásfüggvények tulajdonságait.