A november 12.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Mutassunk példát két korrelálatlan ξ és η valószínűségi változóra, melyek nem függetlenek.

   Megoldás: Sok egyszerű példát adhatunk. Tekintsük például a következő példát: Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban, Ekkor a ξ és $\eta = \xi^2$ valószínűségi változók korrelálatlanok, de nem függetlenek. Valóban, $E\xi = 0$, $E\eta = E\xi^2 = \dfrac{1}{12}$, $E\xi\eta = E\xi^3 = 0$, $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = 0$. Másrészt ξ és η nem függetlenek, sőt az η valószínűségi változó a ξ valószínűségi változó determinisztikus függvénye. Egy lehetséges formális indoklása annak, hogy ξ és η nem független a következő: Legyen $0 < a < 1$ tetszőleges szám. Ekkor $\{\omega\colon \eta < a^2\} = \{\omega\colon |\xi| < a\}$. Ezért $P(\xi < a, \eta < a^2) = P(\xi < a)$, azaz $P(\xi < a, \eta < a^2) \neq P(\xi < a)P(\eta < a^2)$.

2. Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $[0,1]$-en, és $\mathbf{P}$ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x) = \Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x) = \begin{cases} \xi(1-x) & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \xi\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}.$$

   Lássuk be, hogy ξ és η normális eloszlású valószínűségi változók, de a (ξ, η) vektor nem normális eloszlású valószínűségi vektor.

   Megoldás: A ξ és η valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$P(\xi > x) = \lambda(\Phi(x), 1]) = 1 - \Phi(x)\,.$$

   Az, hogy (ξ, η) vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi+\eta = 0) = \frac{1}{2}$ azonosságból. Valában, egy normális eloszlású valószínűségi változó nem vehet fel egy konkrét értéket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel.

3. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független a $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ és $\sum\limits_{j=1}^n \xi_j^2$ összegek normalizáltjainak azaz az $\sqrt{\dfrac{12}{n}} \sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ és $\sqrt{\dfrac{180}{n}} \sum\limits_{j=1}^n \left(\xi_j^2 - \dfrac{1}{12}\right)$ valószínűségi változóknak az együttes eloszlása a két-dimenziós standard normális eloszláshoz konvergál, ha $n \to \infty$.

   Megoldás: $E\xi = 0$, $E\xi^2 = \dfrac{1}{12}$, $\mathrm{Var}\,\xi = \dfrac{1}{12}$, $\mathrm{Var}\,\xi^2 = E\xi^4 - (E\xi^2)^2 = \dfrac{1}{80} - \dfrac{1}{144} = \dfrac{1}{180}$. Továbbá $\mathrm{Cov}\,(\xi, \xi^2) = E\xi^3 - E\xi E\xi^2 = 0$. Ezért a $\left(\sqrt{12}\xi_j, \sqrt{180}\left(\xi_j^2 - \dfrac{1}{12}\right)\right)$, $j = 1, 2, \dots$, véletlen vektorok függetlenek, nulla várható értékkel és az identitás kovariancia mátrix-szal. Innen, és a több-dimenziós centrális határeloszlástételből következik a feladat állítása.

3a. Dobjunk le a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumba egymástól függetlenül egyenletes eloszlással 18 000 pontot. Adjunk jó közelítő becslést a több-dimenziós centrális határeloszlástétel segítségével arra, hogy a ledobobott pontok értékének a négyzetösszege kisebb, mint 1520, a ledobott pontok értékenek az összege pedig nagyobb, mint 60.

Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik ledobott pont értékét, $1 \le j \le 18\,000$, és definiáljuk az $S = \sum\limits_{j=1}^{18\,000} \xi_j$ és $T = \sum\limits_{j=1}^{18\,000} \xi_j^2$ összegeket. Ekkor, mint láttuk a centrális határeloszlástétel szerint az a $\sqrt{\frac{12}{18\,000}} \sum\limits_{j=1}^{18\,000} \xi_j = \sqrt{\frac{12}{18\,000}} S$ és $\sqrt{\frac{180}{18\,000}} \sum\limits_{j=1}^{18\,000} \left(\xi_j^2 - \frac{1}{12}\right) = \sqrt{\frac{180}{18\,000}} T - 1500$ valószínűségi változók közelítőleg függetlenek és standard normális eloszlásúak. Ezért a minket érdeklő valószínűség

$$P(S > 60, T < 1520) \sim P\left(\sqrt{\frac{12}{18\,000}} S > \frac{6}{\sqrt{15}}\right) \cdot P\left(\sqrt{\frac{180}{18\,000}} T - 1500 < 2\right)$$
$$\sim \left(1 - \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{15}}\right)\right) \cdot \Phi(2),$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli.

4. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor $G(x) = P(\xi + \xi^2 < x)$. Mivel a ξ (exponenciális eloszlású valószínűségi) változó csak nem negatív értékeket vesz fel, ezért $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó is egy valószínűséggel nem negatív értéket vesz fel, azaz $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Ha $x \ge 0$, akkor a $\xi + \xi^2 < x$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a ξ valószínűségi változó olyan y értéket vesz fel, melyre $y + y^2 < x$, azaz $y_1(x) < \xi < y_2(x)$, ahol $y_2(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$, és $y_1(x) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}$, azaz $y_2(x)$ és $y_1(x)$ az $y^2 + y - x = 0$ egyenlet nagyobb illetve kisebb gyöke. Mivel $y_1(x) \le 0$, $y_2(x) \ge 0$ minden $x \ge 0$ számra, ezért $G(x) = P\left(y_1(x) < \xi < y_2(x)\right) = P\left(\xi < y_2(x)\right) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$. Ezzel meghatároztuk a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. A $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, azaz $g(x) = 0$, ha $x < 0$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x}} \exp\left\{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$.

5. Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes

dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j = 1, \dots, k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \dots + l_k) \frac{(l_1 + \dots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \\
&= \frac{\lambda^{(l_1 + \dots + l_k)}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{l_1} \cdots \lambda^{l_k}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1 + \dots + p_k)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j}
\end{aligned}$$

tetszőleges $l_1 \geq 0$, ... , $l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

6. Lássuk be az előző feladat segítségével a következő állítást:

   Legyen adva ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Dobjunk le egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül véletlenül egyenletesen ξ darab pontot az egységintervallumra, azaz tegyük fel, hogy minden pont $b - a$ valószínűséggel esik valamely $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba. Ekkor a $[0, 1]$ intervallum tetszőleges felbontására $[s_0, s_1]$, $[s_1, s_2]$, ... , $[s_{k-1}, s_k]$ intervallumokra, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$, az egyes intervallumokba eső pontok száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel.

   Megoldás: Tekintsük a következő urnamodellt. Tekintünk ξ számú golyót, tehát annyit, ahány ledobott pontot tekintettünk az előző feladatban. Tegyük az l-ik golyót a j-ik urnába, ha a l-ik pont az $[s_{j-1}, s_j]$ intervallumba esett, $1 \leq j \leq k$. Akkor az előző feladat eredménye alapján az egyes urnákba eső golyók száma egymástól függetetlen Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel. Innen következik a feladat állítása.

7. Legyen

$$\begin{array}{ll}
\xi_{1,1} \dots, & \xi_{1,n_1} \\
\vdots & \vdots \\
\xi_{k,1} \dots, & \xi_{k,n_k} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

   szériasorozat, azaz tegyük fel, hogy az egy sorban álló valószínűségi változók függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy e valószínűségi változók teljesítik a következő feltételeket:

1.) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem negatív egész értékeket vesznek fel.

2.) $P(\xi_{k,j}=1)=\lambda_{k,j}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}=\lambda>0$.

3.) $\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}\to 0$, ha $k\to\infty$, és $\sum\limits_{j=1}^{n_k}P\left(\xi_{k,j}\ge 2\right)\to 0$, ha $k\to\infty$.

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $k\to\infty$, azaz $\lim\limits_{k\to\infty}P(S_k=l)=\dfrac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}$ minden $l=0,1,2,\dots$ számra.

Megoldás: A feladat állítása ekvivalens azzal, hogy az S_k valószínűségi változók karakterisztikus függvényei konvergálnak egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényéhez. Egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}e^{ikt}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=\exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}.$$

Vegyük észre, hogy rögzített rögzített t számra $Ee^{it\xi_{k,j}}=1-\lambda_{k,j}+\lambda_{k,j}e^{it}+\varepsilon(k,j)$, ahol az $\varepsilon_(k,j)$ hibatag teljesíti az $|\varepsilon_(k,j)|\le\text{const.}\sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\xi_{k,j}\ge 2)$. Ezt a becslést kapjuk, ha az $Ee^{it\xi_{k,j}}=P(\xi_{k,j}=0)+\lambda_{k,j}e^{it}+\sum\limits_{j=2}^{\infty}e^{ijt}P(\xi_{k,j}=j)$ összegben a $\sum\limits_{j=2}^{\infty}e^{ijt}P(\xi_{k,j}=j)$ kifejezést a $\sum\limits_{j=2}^{\infty}P(\xi_{k,j}=j)=P(\xi_{k,j}\ge 2)$ kifejezéssel hegyettesítjük, és figyelembe vesszük az elkövetett hibát.

Innen következik, hogy $\log Ee^{it\xi_{k,j}}=-\lambda_{k,j}+\lambda_{k,j}e^{it}+\delta(k,j)$, ahol $\delta(k,j)\le\text{const.}\left(\varepsilon(k,j)+\lambda_{k,j}^2\right)$. Ez következik a $\log(1+z)=z+\alpha(z)$, $|\alpha(z)|\le z^2$, egyenlőtlenségből, ami érvényes akkor, ha $|z|\le\frac12$. Ez kiolvasható $\log(1+z)$ függvény hatványsorából. Másrészt azt használjuk ki, hogy elég nagy k-ra a megfogalmazott feltételekből következik, hogy $\left|Ee^{it\xi_{k,j}}-1\right|\frac12$, ha $k\ge k_0(t)$.

Innen következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\log\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}Ee^{it\xi_{k,j}}=-\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}(\lambda_{k,j}+\lambda_{k,j}e^{it})=\lambda(e^{it}-1)$, mert $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\xi_{k,j}\ge 2$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}^2\to 0$, mert

$$\sum_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}^2\le\sup_{1\le n_k}\lambda_{k,j}\sum_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}\le\text{const.}\sup_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}.$$

Továbbá felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}=\lambda>0$.

A bizonyított állításokból következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} Ee^{itS_k} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{n_k} Ee^{itx_{j,k}} = \lim_{k\to\infty} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n_k} \log Ee^{itx_{j,k}}\right\} = e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

és ezt kellett belátni.

Házi feladat:

Legyen ξ és η két független exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, illetve $g(x) = e^{-\mu x}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.