A november 26.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, ha $y \ge 0$, $f(y) = 0$, ha $y < 0$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $1 \le k \le n$. Számítsuk ki a

$$(S_1, \dots, S_{n-1}, S_n) \quad \text{és} \quad \left(\frac{S_1}{S_n}, \dots, \frac{S_{n-1}}{S_n}, S_n\right)$$

véletlen vektorok sűrűségfüggvényét. Ezen eredmények segítségével mutassuk meg, hogy az $\left(\frac{S_1}{S_n}, \dots, \frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ véletlen vektor független az S_n valószínűségi változótól, és e vektor elemei a $[0,1]$ intervallumban független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló rendezett mintát alkotnak.

Ezt a feladatot úgy fogjuk megoldani, hogy kiszámoljuk a definiált véletlen vektor sűrűségfüggvényét, és ellenőrizzük, hogy ez olyan tulajdonságú, mint ahogy azt állítottuk. Ahhoz, hogy ezt a programot végrehajtsuk szükségünk van arra, hogy tudjuk bizonyos transzformációk során hogyan változik egy integrál. Felidézem azt az eredményt, amelyikre szükségünk van. Ezt a szükségesnél általánosabb formában fogalmazom meg. A most vizsgált problémában elegendő lenne invertálható leképezéseket vizsgálni, ahol minden pontnak egyetlen ősképe van. A szükséges eredmény megfogalmazása érdekében először felidézem a Jacobian foglmát.

Jacobian definiciója. *Legyen $y_k = T_k(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le k \le n$, az n-dimenziós tér egy tartományának síma transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik tartományába. E transzformáció $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1, \dots, x_n))$ Jakobiánja egy $(x_1, \dots, x_n)$ pontban a*

$$\left(\frac{\partial T_k(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_n}\right), \quad 1 \le l, k \le n,$$

$n \times n$-es (az $(x_1, \dots, x_n)$ pontban vett derivált) mátrix determinánsának az abszolut értéke.

(A Jacobian szemléletes tartalma: Ez adja meg, hogy az $(x_1, \dots, x_n)$ pont kis környezetének a térfogatát a $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ transzformáció hányszorosára nagyítja ki.)

Integráltranszformációról szóló képlet. *Legyen adva az n-dimenziós tér egy A tartományának egy síma $y_k = T_k(x_1, \dots, x_n)$, $1 \le k \le n$, transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik B tartományába. Legyen továbbá adva a B tartományon egy $f(y_1, \dots, y_n)$ függvény. Ezen $f(y_1, \dots, y_n)$ függvénynek a $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ transzformáció által meghatározott ősképén azt az A tartományon értelmezett $g(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{T}^{-1} f(x_1, \dots, x_n)$ függvényt értjük az A tartományon, melyre*

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(T_1(x_1, \dots, x_n), \dots, T_n(x_1, \dots, x_n))$$

minden $(x_1,\dots,x_n)\in A$ *pontban. Ekkor*

$$\int_B f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n$$
$$=\int_A \frac{\mathbf{T}^{-1}f(x_1,\dots,x_n)}{\displaystyle\sum_{\substack{\text{olyan } (z_1,\dots,z_n)\in A \text{ pontok}\\ \text{melyekre } T_k(z_1,\dots,z_n)=T_k(x_1,\dots,x_n)\\ k=1,\dots,n}} \frac{1}{\mathcal{J}(\mathbf{T}(z_1,\dots,z_k))}}\,dx_1\dots dx_n.$$

Megoldás: Számoljuk ki az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvényét. Ezt a következőképp tesszük. Mivel az $\{\omega\colon S_1(\omega)<u_1,\dots,S_n(\omega)<u_n)\}$ esemény kifejezhető, mint egy $\{\omega\colon(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))\in B\}$ alakú esemény, és a $(\xi_1(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ véletlen vektornak ismerjük a sűrűségfüggvényét, a keresett eseményt ki tudjuk fejezni, mint egy alkalmas integrált. Természetes integráltranszformációval ezt az integrált át tudjuk írni, mint egy olyan integrált, melyben az integrálási tartomány az $\{(x_1,\dots,x_n)\colon x_1<u_1,\dots,x_n<u_n\}$ halmaz, és a transzformáció szerkezetéből fogva az integrandus nem függ az $u_1,\dots,u_n$ számoktól, így megkapjuk a keresett sűrűségfüggvényt. Konkrétan a következő számolást végezzük el:

$$P(S_1<u_1,\dots,S_n<u_n)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in B)=\int_B f(y_1)\cdots f(y_n)\,dy_1\,\dots\,dy_n,$$

ahol $B=B(u_1,\dots,u_n)=\{(y_1,\dots,y_n)\colon y_1+y_2+\dots+y_j<u_j,\ j=1,\dots,n\}$.

Írjuk át a fenti integrált a $T(y_1,\dots,y_n)=(x_1,\dots,x_n)$, $x_j=y_1+\dots+y_j$, $j=1,2,\dots,n$ transzformációval. E transzformáció invertálható, és Jacobiánja 1, a B halmazt az $\{(x_1,\dots,x_n)\colon x_j<u_j,\ j=1,\dots,n\}$ halmazba képezi. (A leképezés inverze: $y_1=x_1$, $y_j=x_j-x_{j-1}$, $j=2,\dots,n$. Ezért

$$P(S_1<u_1,\dots,S_n<u_n)=\int_{x_1\le u_1,x_2\le u_2,\dots x_n\le u_n} g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,\dots\,dx_n,$$

ahol $g(x_1,\dots,x_n)=\lambda^n e^{-\lambda x_n}$, ha $0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n$, és nulla egyébként. (Ugyanis $f(y_1)\cdots f(y_n)=f(x_1)f(x_2-x_1)\cdots f(x_n-x_{n-1})=\lambda^n e^{-\lambda x_n}$, ha $0\le x_1\le\dots\le x_n$, és nulla egyébként. Innen az $(S_1,\dots,S_n)$ vektor sűrűségfüggvénye $f(x_1,\dots,x_n)=\lambda^n e^{-\lambda x_n}$, ha $0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n$, és $f(x_1,\dots,x_n)=0$ egyébként. Ezért speciálisan S_n sűrűségfüggvénye

$$f_n(x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_{n-1}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x_n},$$

ha $x_n\ge 0$, $f_n(x_n)=0$, ha $x_n<0$.

Számítsuk ki az $\left(\frac{S_1}{S_n},\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n},S_n\right)$ vektor sűrűségfüggvényét az $(S_1,\dots,S_n)$ véletlen vektor $f(x_1,\dots,x_n)$ sűrűségfüggvényének ismeretében hasonló módon. Jegyezzük meg először, hogy az $(S_1,\dots,S_n)$ sűrűségfüggvényének speciális alakja miatt, (annak következtében, hogy az bizonyos helyeken nulla) $P((S_1,\dots,S_n)\in D)=$

1, $P\left(\left(\frac{S_1}{S_n},\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n},S_n\right)\in E\right)=1$, a $D=((z_1,\dots,z_n)\colon 0\le z_1\le z_2\cdots\le z_n)$ és $E=\{(y_1,\dots,y_n)\colon 0\le y_1\le y_2\le\dots\le y_{n-1}\le 1, 0<y_n\}$ halmazokra. Ezért

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{S_1}{S_n}<u_1,\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n}<u_{n-1},S_n<x\right)\\
&\quad=P((S_1<S_nu_1,\dots,S_{n-1}<S_nu_{n-1},S_n<x)\cap(S_1,\dots,S_n)\in D))\\
&\quad=\int_{K\cap D} g(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n.
\end{aligned}$$

ahol $K=\{(y_1,\dots,y_n)\colon 0\le y_j<u_jy_n,\ j=1,\dots,n-1,\ 0\le y_n<x\}$. Definiáljuk a $T(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$, $y_1=\frac{x_1}{x_n}$, $y_2=\frac{x_2}{x_n}$, $y_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}$, $y_n=x_n$ transzformációt az D halmazon. Ez invertálható transzformáció az D halmazról a E halmazra, melynek Jacobiánja az $x_n^{-(n-1)}$ függvény. (A függvény inverze, $x_n=y_n$, $x_k=y_ky_n$, $1\le k\le n-1$. Ezen leképezés szerint a $K\cap D$ halmaz őse képe az $\{(x_1,\dots,x_n)\colon x_1<u_1,\dots,x_{n-1}<u_{n-1},x_n<x\}\cap E$ halmaz. Ezért

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{S_1}{S_n}<u_1,\dots,\frac{S_{n-1}}{S_n}<u_{n-1},S_n<x\right)\\
&\quad=\int_{\{0\le x_j<u_j,\,j=1,\dots,n-1,\,0\le x_n<x\}\cap E} x_n^{n-1}f\left(\frac{x_1}{x_n},\dots,\frac{x_{n_1}}{x_n},x_n\right)dx_1\dots dx_n.
\end{aligned}$$

Innen a keresett sűrűségfüggvény $f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=\lambda^ne^{-\lambda x_n}x_n^{n-1}$, ha $0\le x_1< x_1<\cdots<x_{n-1}\le 1$, és $x_n\ge 0$, azaz $(x_1,\dots,x_n)\in E$, és $f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=0$, egyébként. Ez azt jelenti, hogy $f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)=g(x_1,\dots,x_{n-1})h(x_n)$, ahol $g(x_1,\dots,x_{n-1})=(n-1)!$, ha $0\le x_1\le\dots\le x_{n-1}\le 1$, $g(x_1,\dots,x_{n-1})=0$, egyébként, $h(x_n)=\dfrac{x_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x_n}$, ha $x_n\ge 0$, $h(x_n)=0$, ha $x_n<0$. Ez azt jelenti, hogy az $\left(\dfrac{S_1}{S_n},\dots,\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ vektor és S_n valószínűségi változók függetlenek, a tekintett vektor eloszlása megegyezik $n-1$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta eloszlásával, az S_n vektor eloszlása pedig n független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlása. (Azt, hogy $h(x_1,\dots,x_{n-1})$ egy $n-1$ elemű egyenletes eloszlású minta sűrűségfüggvénye megbeszéltük egy korábbi gyakorlaton.)

Házi feladat:

Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, exponenciális eloszlású eloszlású valószínűségi változók λ paraméterrel, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$, $f(x)=0$, ha $x\le 0$. Számtsuk ki közvetlenül (konvolúcuó) segítségével a $\xi_1+\dots+\xi_n$ összeg sűrűségfüggvényét.

2. Van négy urna, mindegyikben 10 fehér és 10 piros golyó. Elvégezünk 5 húzássorozatot, mindegyik húzáskor mindegyik urnából kiveszünk egy golyót visszatevés nélkül. Az egyes húzások alkalmával két forintot nyerünk, ha ugyanannyi

piros golyót húzunk mint fehéret, és egy forintot veszítünk, ha ezek száma eltérő. Számoljuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Jelölje Z_j a j-ik húzás során szerzett nyereményünket. Számoljuk ki a Z_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét, illetve a $\mathrm{Cov}\,(Z_j, Z_k)$ covarianciákat. Ennek érdekében tekintsük a Z_j valószínűségi változók, illetve a (Z_j, Z_k) véletlen vektorok eloszlását. $P(Z_j = 2) = P(Z_1 = 2 = 6 \cdots \frac{1}{16}$. (Hat módon választhatom ki azt az két urnát, ahonnan piros golyót húzok, és $\frac{1}{6}$ annak a valószínűsége, hogy mindegyik urnában az előirt golyót húzom. $P(Z_j = -1) = \frac{5}{8}$. Ha $j \neq k$, akkor $P(Z_j = 2, Z_k = 2) = \frac{3}{8}\left(\frac{9^4 \cdot + 10^4 + 4 \cdot 9^2 \cdot 10^2}{19^4}\right)$, (annak valószínűségét számoltuk ki, hogy először két fehéret és két pirosat húzunk, aztán vagy minden urnából ugyanolyan színű golyót húzunk vagy minden urnából ellenkező színűt, azután azt, hogy mind a fehér mind a piros hízások közül egyben megváltozott a húzás színe, egyben pedig nem.) $P(Z_j = 2, Z_k = 1) = P(Z_j = 1, Z_k = 2) = P(Z_j = 2) - P(Z_j = 2, Z_k = 2$, $P(Z_j = 1, Z_k = 1) = P(Z_j = 1) - P(Z_j = 1, Z_k = 2)$.

Innen következik, hogy $EZ_j = 2P(Z_j = 2) - P(Z_j = -1) = \frac{1}{8}$, ezért a keresett várható érték az egyes húzásokból származó nyereményeinek várható érték összege $\frac{5}{8}$. $EZ_j^2 = \frac{4\cdot 3+5}{8} = \frac{17}{8}$, $\mathrm{Var}\,Z_j = \frac{17}{8} - \frac{1}{64}$. Ki lehet számolni az $EZ_jZ_k = 4P(Z_j = 2, Z_k = 2) + P(Z_j = -1, Z_k = -1) - 2P(Z_j = 2, Z_k = -1) - 2P(Z_j = 2, Z_k = -1)$ és $\mathrm{Cov}\,(Z_j, Z_k) = EZ_jZ_k - EZ_jEZ_k$ mennyiségeket. Végül a keresett szórásnégyzet $5EZ_1^2 + 20\mathrm{Cov}\,(Z_1, Z_2)$. Ezt ki lehet számolni behelyettesítve a megfelelő formulákba, de ezeket az érdektelen számolásokat elhagyom.

3. Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk: Feldobnak egy szabályos pénzdarabot egymástól függetlenül egymás után. Amennyiben fej a dobás eredménye, akkor a feltett tét dupláját kapjuk, ha írás, akkor a tét $\frac{2}{3}$ részét elveszítjük, és csak $\frac{1}{3}$ részét őrizhetjük meg. Mivel ez a játék előnyös, ezért feltesszük minden játékban minden pénzünket. Lássuk be, hogy amennyiben A volt a vagyonunk a játék kezdete előtt, és Z_n jelöli vagyonunkat az n-ik játék után, akkor

   a) $EZ_n = A\left(\dfrac{7}{6}\right)^n$, azaz vagyonunk várható értéke exponenciálisan nő.

   b) Z_n nyereményünk egy valószínűséggel tart nullához.

   c) Értsük meg, hogy ez a két állítás nem mond egymásnak ellent.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = \dfrac{1}{3}$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók, $P(\xi_j = 2) = P\left(\xi_j = \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, és ezenkívül $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$. Ezért $E\xi_j = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{6}$, és $EZ_n = EA\xi_1\xi_2\cdots\xi_n = AE\xi_1E\xi_2\cdots E\xi_n = A\left(\dfrac{7}{6}\right)^n$. Ez a feladat a) állítása.

A $Z_n = A\xi_1\xi_2\cdots\xi_n$ relációból következik, hogy $\dfrac{1}{n}\log Z_n = \dfrac{\log A}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\log\xi_j$. Továbbá, $E\log\xi_j = \dfrac{1}{2}\left(\log 2 + \log\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$. Ezért a nagy számok törvénye szerint $\dfrac{1}{n}\log Z_n$ egy valószínűséggel konvergál a negatív $-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$ számhoz. Válasszunk olyan c számot, melyre $0 < c < \dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$. Az előző állításból kövekezik, hogy $Z_n(\omega) < e^{-cn}$ minden elég nagy $n \ge n_0(\omega)$ indexre a a nagy számok törvénye alapján. Innen következik a feladat b) állítása.

Az a) rész bizonyítása azon alapult, hogy $E\xi_j > 1$, a b) részé pedig azon, hogy $E\log\xi_j < 0$. Ez a két egyenlőtlenség teljesülhet egyszerre, mert a várható érték és a logaritmus egymással nem felcserélhető. Igaz az $Ee^\eta \ge e^{E\eta}$ egyenlőtlenség (ez a konvex függvényekre vonatkozó úgynevezett Jensen egyenlőtlenség speciális esete), ahonnan $\xi = \log\eta$ választással $E\xi \ge e^{\log E\xi}$, de egyenlőség nem írható a fenti egyenlőtlenség helyett. Jegyezzük meg, hogy hasonló, de egyszerűbben érthető példát mutat a feladat a) és b) állításának egyszerre való teljesülésére a következő modell. Olyan játékot játszunk, melyben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elveszítjük, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig megháromszorozzuk a pénzünket. Az egyes játékok egymástól függetlenek, és minden időpontban minden pénzünket feltesszük. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az n-ik játék után minden pénzünket elveszítjük, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami rendkívül gyorsan tart egyhez, és pénzünk várható értéke $3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ami exponenciálisan gyorsan nő az n függvényében. Hasonló, csak kissé rejtettebb eset történik az általunk tárgyalt feladatban is. Tekintsük a feladatban tekintett játék nyereményét sok játék után. Azt állíthatjuk, hogy nagy n indexre az n-ik játék után nagy valószínűséggel alig marad pénzünk. Viszont kis valószínűséggel nagyon sok pénzt nyerünk, és ezért nyereményünk várható értéke nagy. Ez az oka annak, hogy nemcsak a b), hanem az a) állítás is teljesül.