Az október 15.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Az előző gyakorlaton szereplő egyik feladatban (mi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos dobókocka dobásában pontosan két ötös dobás következik be az első hatos dobás előtt) felhasználtunk egy heurisztikus gondolatot, mely szerint bizonyos események bekövetkezése után történő események ugyanolyan valószínűségi törvényeknek tesznek eleget, mintha kezdettől fogva néznénk a folyamatot. A következő két feladat célja ennek az elvnek egy lehetséges pontos megfogalmazása és bebizonyítása.

1. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és tegyük fel (az egyszerűség kedvéért), hogy egész értékeket vesznek fel. Tekintsük az egész számok két A és B, $A \subset B$, részhalmazát, és legyen a τ (valószínűségi változó) a legkisebb, k szám, melyre $\xi_k \subset A$. Tegyük fel, hogy $P(\tau < \infty) = 1$. Definiáljuk az $\eta_n = \xi_{\tau+n}$, $n = 1, 2, \dots$, valamint a következő ζ valószínűségi változót: $\zeta = 1$, ha $\xi_\tau \in A$, $\zeta = 0$, ha $\xi_\tau \in B \setminus A$. Lássuk be, hogy ζ, η_1, η_2, $\dots$ független valószínűségi változók, továbbá az η_n valószínűségi változók eloszlása megegyezik a ξ_n valószínűségi változók eloszlásával, és $P(\zeta = 1) = 1 - P(\zeta = 0) = \dfrac{P(\xi_1 \in A)}{P(\xi_1 \in B)}$.

   Megoldás: Elég megmutatni, hogy tetszőleges $\tau = n$ eseményre, m indexre, $k_1, \dots$, k_m egész számokra valamint $\varepsilon = 0$ vagy $\varepsilon = 1$ számra

$$P(\eta_l = k_l | \tau = n) = P(\xi_l = k_l), \quad 1 \le l \le m, \quad P(\zeta = \varepsilon | \tau = n) = P(\bar\zeta = \varepsilon), \tag{a}$$

   és

$$P(\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m, \zeta = \varepsilon | \tau = n) = P(\xi_1 = k_1), \dots, P(\xi_m = k_m) P(\bar\zeta = \varepsilon), \tag{b}$$

   ahol $\bar\zeta$ olyan valószínűségi változó, melyre $P(\bar\zeta = 1) = 1 - P(\bar\zeta = 0) = \dfrac{P(\xi_1 \in A)}{P(\xi_1 \in B)}$.

   Valóban, egyrészt a második relációból következik, hogy

$$P(\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m, \zeta = \varepsilon) = P(\xi_1 = k_1), \dots, P(\xi_m = k_m) P(\bar\zeta = \varepsilon),$$

mert

$$\begin{aligned}
P(\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m, \zeta = \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\eta_1 = k_1, \dots, \eta_m = k_m, \zeta = \varepsilon | \tau = n) P(\tau = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_1 = k_1), \dots, P(\xi_n = k_m) P(\bar\zeta = \varepsilon) P(\tau = n) \\
&= P(\xi_1 = k_1), \dots, P(\xi_m = k_m) P(\bar\zeta = \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) \\
&= P(\xi_1 = k_1), \dots, P(\xi_m = k_m) P(\bar\zeta = \varepsilon),
\end{aligned}$$

másrészt

$$
\begin{aligned}
&P(\eta_1 = k_1)\cdots P(\eta_m = k_m)P(\zeta=\varepsilon) \\
&\quad = \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} P(\eta_1 = k_1|\tau = n_1)P(\tau=n_1)\right)\cdots\left(\sum_{n_m=1}^{\infty} P(\eta_m = k_m|\tau = n_m)P(\tau=n_m)\right) \\
&\qquad\quad \left(\sum_{n_{m+1}=1}^{\infty} P(\zeta = \varepsilon|\tau = n_{m+1})P(\tau=n_{m+1})\right) \\
&\quad = \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} P(\xi_1 = k_1)P(\tau=n_1)\right)\cdots\left(\sum_{n_m=1}^{\infty} P(\xi_m = k_m)P(\tau=n_m)\right) \\
&\qquad\quad \left(\sum_{n_{m+1}=1}^{\infty} P(\bar\zeta = \varepsilon)P(\tau=n_{m+1})\right) \\
&\quad = P(\xi_1=k_1)\cdots P(\xi_m=k_m)P(\bar\zeta=\varepsilon)\left(\sum_{n_1=1}^{\infty} P(\tau=n_1)\right)\cdots\left(\sum_{n_m=1}^{\infty} P(\tau=n_m)\right) \\
&\qquad\quad \left(\sum_{n_{m+1}=1}^{\infty} P(\tau=n_{m+1})\right) = P(\xi_1=k_1)\cdots P(\xi_m=k_m)P(\bar\zeta=\varepsilon)
\end{aligned}
$$

A (b) állítás bizonyítása érdekében vegyük észre, hogy

$$
\begin{aligned}
&P(\eta_1 = k_1,\dots,\eta_m=k_m,\zeta=1,\tau=m) \\
&\quad = P(\xi_1\notin B,\xi_2\notin B,\xi_{n-1}\notin B,\xi_n\in A,\xi_{n+1}=k_1,\dots,\xi_{n+m}=k_m) \\
&\quad = P(\xi_1\notin B,\xi_2\notin B,\xi_{n-1}\notin B,\xi_n\in A)P(\xi_{n+1}=k_1)\cdots P(\xi_{n+m}=k_m) \\
&\quad = P(\tau=n)\frac{P(\xi_n\in A)}{P(\xi_n\in B)}P(\xi_{n+1}=k_1)\cdots P(\xi_{n+m}=k_m) \\
&\quad = P(\tau=n)P(\bar\zeta=1)P(\xi_{n+1}=k_1)\cdots P(\xi_{n+m}=k_m)
\end{aligned}
$$

A (b) azonosság bizonyítása $\zeta = 0$ esetben, illetve az (a) azonosság bizonyítása hasonló.

2. Legyenek $\zeta_1,\dots,\zeta_l,\xi_1,\xi_2,\dots$ független, egész értékű valószínűségi változók, és definiáljunk egy ζ_{l+1} valószínűségi változót illetve valószínűségi változók egy $\eta_1,\eta_2,\dots,$ sorozatát csak a $\xi_1,\xi_2,\dots$ sorozat segítségével, ami azt jelenti, hogy

$$\zeta_{l+1} = g(\xi_1,\xi_2,\dots),\qquad \eta_k = f_k(\xi_1,\xi_2,\dots),\quad k=1,2,\dots$$

bizonyos (mérhető) g és f_k függvényekkel. (Az egyszerűség kedvééet feltesszük, hogy az új valószínűségi változók is egész értékűek. A jelölést kissé elbonyolítottam. Azért beszélek külön egy ζ_{l+1} valószínűségi változóról, ahelyett, hogy például η_0-lal jelöltem volna azt, mert ez a bonyolultabb jelölés jobban illeszkedik ahhoz a feladathoz, melyben alkalmazni kívánjuk.) Tegyük fel továbbá azt is, hogy léteznek olyan N-változós egész értékű $g_N(x_1,\dots,x_N)$, és $f_{k,N}(x_1,\dots,x_N)$ függvények, $N=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, melyekre $\lim_{N\to\infty} g_N(\xi_1,\dots,\xi_N)=g(\xi_1,\xi_2,\dots)=\zeta_{l+1}$, $\lim_{N\to\infty} f_{k,N}(\xi_1,\dots,\xi_N)=f_k(\xi_1,\xi_2,\dots)=\eta_k$, $k=1,2,\dots$ egy valószínűséggel. (Az, hogy ez a tulajdonság a minket érdeklő esetben teljesül könnyen látható. Egyébként valójában ez a feltétel nem jelent megszorítást, mindig teljesül. De ennek indoklása nem-triviális mértékelméleti meggondolásokat igényel, ezért ettől eltekintünk.) Lássuk be, hogy a

$$\zeta_1,\dots,\zeta_l \text{ valószínűségi változók és a } (\zeta_{l+1},\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m) \text{ véletlen vektor}$$

(az m pozitív egész szám tetszőleges) függetlenek.

Megoldás: Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor a ζ_{l+1} és $\eta_1,\eta_2,\dots$ valószínűségi változókat definiáló valószínűségi változók csak N változótól függnek, azaz a $\zeta_{l+1}^{(N)}=g_N(\xi_1,\dots,\xi_N)$ $\eta_k^{(n)}=f_{k,N}(\xi_1,\dots,\xi_N)$, $k=1,2,\dots$, valószínűségi változókat tekintjük. Ebben az esetben a feladat állítása a függetlenségről tanult tulajdonságok között szerepelt, egyébként a Fubini tételből, illetve a valószínűségi változók függetlenségét az eloszlásfüggvények segítségével kifejező formula felhasználásával könnyen bizonyítható. Az általános eset $n\to\infty$ határátmenettel (például a Lebesgue tétel segítségével) adódik. Ugyanis

$$\begin{aligned}&P(\zeta_1\in A_1,\dots,\zeta_l\in A_l,(\zeta_{l+1},\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)\in B)\\ &\quad=\lim_{N\to\infty}P(\zeta_1\in A_1,\dots,\zeta_l\in A_l,(\zeta_{l+1}^{(N)},\eta_1^{(N)},\eta_2^{(N)},\dots,\eta_m^{(N)})\in B)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&P(\zeta_1\in A_1)\cdots P(\zeta_l\in A_l,(\zeta_{l+1},\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)\in B)\\ &\quad=\lim_{N\to\infty}P(\zeta_1\in A_1)\cdots\lim_{N\to\infty}P(\zeta_l\in A_l)\lim_{N\to\infty}P((\zeta_{l+1}^{(N)},\eta_1^{(N)},\eta_2^{(N)},\dots,\eta_m^{(N)})\in B)\end{aligned}$$

Házi feladat:

Legyenek a $\xi_1,\dots,\xi_n$ valószínűségi változók valamint az $(\eta_1,\dots,\eta_m)$ véletlen vektor függetlenek. Legyenek ezenkívül az $(\eta_1,\dots,\eta_m)$ véletlen vektor $\eta_1,\dots,\eta_m$ koordinátái is függetlenek egymástól. Mutassuk meg, hogy ekkor a $\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_m$ valószínűségi változók is függetlenek.

3. Láttuk, hogy egy ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó momentumaira, $E\xi^{2k+1}=0$, $E\xi^{2k}=1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2k-1)$. Ugyancsak szerepelt az előadáson, hogy egy η valószínűségi változó momentumai az η $\varphi(t)=Ee^{it\eta}$ segítségével $E\eta^k=i^k\left.\dfrac{d^k\varphi(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$. Hasonlóan látható, hogy η $R(t)=Ee^{t\eta}$ momentumgeneráló

függvényére $E\eta^k = \left.\dfrac{d^k R(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$. Felhasználva, hogy a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye és momentumgeneráló függvénye megegyezik a függvény hatványsorával (ez is indoklásra szorul) mutassuk meg, hogy $Ee^{it\xi} = e^{t^2/2}$, $Ee^{t\xi} = e^{t^2/2}$.

Megoldás:

$$Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k E\xi^k}{k! t^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(2k)!} t^{2k}.$$

Viszont

$$\frac{i^{2k} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(2k)!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \frac{1}{(2k)!} = (-1)^k \frac{1}{2^k k!}$$

Innen

$$Ee^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} (-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{t^2}{2} \right)^k = e^{-t^2/2}.$$

Hasonlóan,

$$Ee^{t\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E\xi^k}{k! t^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^k = e^{t^2/2}.$$

4 Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, azaz $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $P(\eta = k) = \dfrac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j) P(\eta = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{(k-j)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k. \end{aligned}$$

Házi feladat:

Ha ξ és η két független, (n, p) illetve (m, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, azaz $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $P(\eta = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$, $k = 0, 1, \dots, m$, akkor $\xi + \eta$ $(n + m.p)$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó.