Az október 29.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Legyen η_1 és η_2 két független normális eloszlású valószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy $\eta_1+\eta_2$ m_1+m_2 várható értékú és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

   Megoldás: Az $\eta_1+\eta_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(u-m_1)^2/2\sigma_1^2} e^{-(x-u-m_2)^2/2\sigma_2^2}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\biggl\{-u^2\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)+u\left(\frac{m_1}{\sigma_1^2}+\frac{x-m_2}{\sigma_2^2}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\biggr\}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\biggl\{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(u-\frac{m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 \\
&\qquad\qquad + \frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\biggr\}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{\frac{(m_1\sigma_2^2+(x-m_2)\sigma_1^2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}-\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}.
\end{aligned}
$$

   Jegyezzük meg, hogy a fenti számolásban megjelenő egyszerűsítések megjelenésének mélyebb oka van. Ha tudjuk, hogy a vizsgált integrál értéke olyan alakú, melyben konstansszor egy kvadratikus alak szerepel, akkor mivel a konvolució eredménye egy sűrűségfüggvény, ezért a végeredmény szükségszerűen normális sűrűségfüggvény. Továbbá, tudjuk, hogy a sűrűségfüggvény egy olyan valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, amelyik várható értéke m_1+m_2 szórásnégyzete pedig $\sigma_1^2+\sigma_2^2$.

2. Bizonyítsuk be az előző feladat állítását a karakterisztikus függvény módszerrel.

   Megoldás: Tudjuk, hogy egy eloszlásfüggvényt meghatároz a karakerisztikus függvénye, ezért elég megmutatni, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén $\eta_1+\eta_2$ $\varphi(t)_{\eta_1+\eta_2}(t)$ karakterisztikus függvénye megegyezik egy m_1+m_2 várható értékú és $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényével. Másrészt azt is tudjuk, hogy $\varphi(t)_{\eta_1+\eta_2}(t0=\varphi_{\eta_1}(t)\varphi_{\eta_2}(t)$ η_1 és η_2 függetlensége miatt. Továbbá tanultuk, hogy egy ζ standard normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi_\zeta(t)=e^{-t^2/2}$, ahonnan egy m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{imt-\sigma^2t^2/2}$. Miért? (Vegyük észre, hogy egy ilyen valószínűségi változó $\sigma\zeta+m$ alakban írható, ahol ζ standard normális eloszlású valószínűségi változó.) Ezért

$$
\varphi(t)_{\eta_1+\eta_2}(t0=\varphi_{\eta_1}(t)\varphi_{\eta_2}(t)=e^{itm_1-\sigma_1^2t^2/2}e^{itm_2-\sigma_2^2t^2/2}=e^{it(m_1+m_2)-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}.
$$

Innen látható a feladat állítása.

3. Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0,2]$ intervalumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke x-nél kisebb $\frac{x}{2}$-vel egyenlő, ha $0 \le x \le 2$, eggyel egyenlő, ha $x \ge 2$, és nulla, ha $x \le 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, melyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, melyek értéke, nagyobb mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megörzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel segítségével.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j valószínűségi változókat: $\xi_j = x$, ha a j-ik dobás értéke x, és $0 \le x \le 1$, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás értéke x, $1 \le x \le 2$. Ekkor ξ_j azt méri, hogy mekkora a hozadéka a j-ik dobásnak a vizsgált összeghez, és ha bevezetjük az $S = \sum\limits_{j=1}^{24000} \xi_j$ valósz1nűségi változókat, akkor minket a $P(5900 < S < 6075)$ valószínűség érdekel. Ennek a valószínűségnek a kiszámításához számoljuk ki először a ξ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. A ξ_j valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényét $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban írhatjuk, ahol $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du$, ahol $f_1(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Az $F_2(x)$ egy olyan mértéket határoz meg, amelyik a nulla pontba $\frac{1}{2}$ súlyt tartalmaz, a maradék rész súlya pedig nulla. Az F_1 és F_2 függvények nem eloszlásfüggvények, (nem egyre normált valószínűségi mértéket határoznak meg), de ugyanúgy számolhatunk vele, mint az eloszládfüggvényekkel. Ezért $E\xi_j = \int xF(\,dx) = \int xF_1(\,dx) + \int xF_2(dx) = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + 0 = \frac{1}{4}$, $E\xi_j^2 = \int x^2F(\,dx) = \int x^2F_1(\,dx) + \int x^2F_2(dx) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + 0 = \frac{1}{6}$. Innen $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{48}$, $ES = 6000$, $\operatorname{Var} S = 2500 = 50^2$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $P(5900 < S < 6075) = P\left(\frac{S-ES}{-2<\sqrt{\operatorname{Var} S}} < 1.5\right) \sim \Phi(1.5) - \Phi(-2)\Big) = \Phi(2) + \Phi(1.5) - 1$, ahol $\Phi(\cdot)$ a normális eloszlástáblázatban kikereshető normális eloszlásfüggvény.

4. Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, azaz $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $P(\eta = k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

   Megoldás:

$$
\begin{aligned}
P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j)P(\eta = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!}\lambda^j \mu^{(k-j)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda + \mu)^k.
\end{aligned}
$$

5. Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes

dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j = 1, \dots, k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \cdots + l_k) \frac{(l_1 + \cdots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} \\
&= \frac{\lambda^{(l_1 + \cdots + l_k)}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{l_1} \cdots \lambda^{l_k}}{l_1! \cdots l_k!} p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1 + \cdots + p_k)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j}
\end{aligned}
$$

tetszőleges $l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

Házi feladat:

Ha ξ és η két független, (n, p) illetve (m, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, azaz $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $P(\eta = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$, $k = 0, 1, \dots, m$, akkor $\xi + \eta$ $(n + m.p)$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó.

6. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk az $\eta_1 = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ és $\eta_2 = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ valószínűségi változókat. Számoljuk ki az (η_1, η_2) véletlen vektor eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Vizsgáljuk az $F(x, y) = P(\eta_1 < x, \eta_2 < y)$ eloszlásfüggvényt. A kívánt valószínűség helyett az alábbi hasonló valószínűséget tudjuk egyszerűen kiszámolni: $P(\eta_1 \geq x, \eta_2 < y) = (y - x)^n$, ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$, és $P(\eta_1 \geq x, \eta_2 < y) = 0$ egyébként. Ugyanis, $\{\omega \colon \eta_1(\omega) \geq x, \eta_2(\omega) < y\} = \{\omega \colon x \leq \xi_j(\omega) < y \text{ minden } 1 \leq j \leq n \text{ indexre }$. Vegyük továbbra észre, hogy $P(\eta_1 < x, \eta_2 < y) = P(\eta_2 < y) - P(\eta_1 \geq x, \eta_2 < y) = (y-x)^n$, és $P(\eta_2 < y) = y^n$, ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, és $P(\eta_2 < y) = 0$ egyébként. Innen

$$
F(x, y) = P(\eta_1 < x, \eta_2 < y) = \begin{cases} y^n - (y-x)^n, & \text{ha } -\dfrac{1}{2} \leq x \leq y \dfrac{1}{2}, \\ y^n & \text{ha } -\dfrac{1}{2} < y < frac12, \text{ és } x > y \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}
$$

Innen az (η_1, η_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}(x, y)$, ahonnan $f(x, y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}$, ha $-\frac{1}{2} \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$, és $f(x, y) = 0$ egyébként.

Megjegyzés: Gyakorlati szempontból (a különbüző momentumok kiszámítása érdekében) a sűrűségfüggvény kiszámítása a fontos. Ezt szemléleletesen egyszerűen lehet látni. Ugyanis $f(x,y)\,dx\,dy$ annak a valószínűsége, hogy létezik olyan j index, melyre $\xi_j \in [x, x+dx]$, $\xi_k \in [y, y+dy]$, és az összes többi ξ_l valószínűségi változó az $[x,y]$ intervallumba esik. Rögzített h és k indexre ennek valószínűsége $(y-x)^{n-2}\,dx\,dy$, ha $-\frac{1}{2} < x < y < \frac{1}{2}$, és nulla különben. Másrészt a (j,k) indexpárt $n(n-1)$ féleképpen választhatjuk, ezért jelenik meg az $n(n-1)$ faktor. A fenti érvelés precízzé tehető. Segítségével ugyanis megmutatható, hogy $P((\eta_1,\eta_2) \in A) = \int\int_A f(u,v)\,du\,dv$ a sík minden „szép” részhalmazára, és innen következik az állítás.