Az október 8.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Egy szabályos kockát feldobunk sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. dobásban jelenik meg a hatos harmadszor?

   Megoldás: $\binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}$. Ez az esemény ugyanis akkor következik be, ha egyrészt az első 19 dobásban két hatos és 17 nem hatos dobás következik be, és ennek valószínűsége $\binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}$, másrészt a húszadik dobás hatos, aminek a valószínűsége $\frac{1}{6}$. Továbbá ez a két esemény független egymástól.

2. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$, $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra.

   Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait.

   Megoldás:

   $$E\xi^{2k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0,$$

   mert az integrandus páratlan függvény. Másrészt parciális integrálással $f(x) = x^{2k-1}$ és $g(x) = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ kapjuk, hogy

   $$\begin{aligned} E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1)x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= (2k-1)E\xi^{2k-2}. \end{aligned}$$

   Innen k szerinti indukcióval kapjuk a feladat második állítását.

3. Egy szabályos dobókockát végtelen sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy az első hatos dobás előtt pontosan két ötös dobás következik be?

   Megoldás: Tekintsük azt az A eseményt, mely akkor következik be, ha az ötös dobás megelőzi a hatos dobást. Ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$, és az utána következő dobássorozat független tőle. Annak a valószínűsége, hogy ezután az ötös dobás megint megelőzi a hatos dobást $\frac{1}{2}$, majd annak valószínűsége, hogy ezután a hatos dobás megelőzi az ötös dobást megint $\frac{1}{2}$, és független a többi eseménytől. így a keresett esemény valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

   Házi feladat: Egy szabályos dobókockát feldobok egymás után végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége, hogy a második hatos dobás előtt prontosan négy páratlan dobás történt?

4. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk egészen addig, amig ötödik alkalommal jelenik meg egy fejdobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsó előtti dobás

fej volt? Mi annak a valószínűsége, hogy két dobással az utolsó dobás előtt fejet dobtunk?

Megoldás: Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás fejdobás? Tekintsük a dobássorozatot addig, amig a negyedik fejdobás bekövetkezett, és vegyük észre, hogy amit utána látunk az olyan eloszású, mint egy elölről kezdődő dobássorozat. Az az esemény, hogy az ötödik fejdobás előtti dobás fej volt azt jelenti, hogy az új dobássorozat fejdobással kezdődik, aminek valószínűsége $\frac{1}{2}$.
Az, hogy az ötödik fejdobás előtt kettővel történt dobás fej két egymást kizáró módon történhet. Vagy az történik, hogy a negyedik dobás után írást, és utána fejet dobunk, aminek a valószínűsége $\frac{1}{4}$ vagy pedig a negyedik fejdobás előtt is, és utána is fejet dobunk. Ezt úgyis tekinthetjük, hogy a harmadik fejdobás után közvetlenül két fejdobás történt. Ennek a valószínűsége is $\frac{1}{4}$. így a kérdezett valószínűség e két esemény valószínűségének az összege, vagyis $\frac{1}{2}$.

Második megoldás: Értsük meg jobban a modell szerkezetét. Vegyük észre, hogy ha tekintünk egy tetszőleges végtelen és soroljuk fel először az ötödik fejdobás előtti dobásokat fordított sorrendben, majd az ötödik fejdobást és az utána következő dobásokat az végtelen sok fejdobást tartalmaznak (ez egy mértékű halmaz) kölcsönösen egyértelmű transzformáció, és annak valószínűsége, hogy a transszformáció után egy adott véges hosszúságú sorozattal kezdődő sorozat jelenik meg ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy a transzformáció előtt ugyanaz a sorozat jelenik meg. (Gondoljuk meg, hogy egy transzformált sorozat első n tagját meghatározza az eredeti sorozat első n tagja, és vice versa. (Formális terminológiával azt mondhatjuk, hogy mértéktartó transzformációt alkalmaztunk.) A tesz eleget, mint az eredeti végtelen sorozat. Viszont az új sorozatok nyelvén a minket érdeklő kérdés úgy fogalmazható meg, hogy mi annak a valószínósége, hogy az első illetve második fej-dobás valószínűsége. Ezek valószínűsége pedig $\frac{1}{2}$.

7. Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2+\eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
Megoldás: $P(\xi^2<x)=\Phi(\sqrt{x})-\Phi(-\sqrt{x})=2\Phi(\sqrt{x})-1$, ha $x\ge 0$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x)=\dfrac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}$, ha $x\ge 0$, és $g(x)=0$, ha $x<0$, és $\xi^2+\eta^2$ sűrűségfüggvénye
$$\begin{aligned} f(x)=g*g(x)&=\int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}}e^{-u/2}e^{-(x-u)/2}\,du\\ &=e^{-x/2}\int_0^1\frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\,dv=\frac{1}{2}e^{-x/2},\quad \text{ha } x\ge 0,\end{aligned}$$
és $f(x)=0$, ha $x\le 0$.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\,dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Hogyan? Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}}.$$