A szeptember 17.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Jellemezzük az olyan valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit, melyek egy valószínűséggel csak véges sok érték valamelyikét vehetik fel. Mutassunk példát olyan diszkrét eloszlású valószínűségi változóra, amelyik minden intervallumban szigorúan monoton nő.

   Megoldás: Könnyű belátni, hogy egy $F(x)$ függvény akkor és csak akkor egy véges sok értéket felvevő valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha $F(x)$ monoton, és létezik véges sok $x_1 < \cdots < x_n$ pont úgy, hogy az $F(x)$ függvény konstans $(-\infty, x_1)$, $[x_1, x_2)$, $[x_2, x_3)$, $\dots$ $[x_n, \infty)$ intervallumon, a $(-\infty, x_1)$ félegyenes értéke nulla és az $[x_n, \infty)$ félegyenesen 1. Ez olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amelyik az $x_1, \dots, x_n$ értékek valamelyikét veszi fel, és az x_j értékét akkora valószínűséggel, amennyi az $F(\cdot)$ függvény ugrása az x_j pontban.

   Ha a valószínűségi változó megszámlálható értéket vehet fel, akkor eloszlásfüggvényének nem feltételnül van ilyen egyszerű geometriai szerkezete. Egy példa erre: Soroljuk fel a racionális számokat valamilyen $r_1, r_2, \dots$ sorrendben. Tekintsünk olyan valószínűségi változót, amelyik az r_n értéket 2^{-n} valószínűséggel veszi fel. Egy ilyen valószínűségi változó diszkrét eloszlású $F(x)$ eloszlásfüggvénye pedig szigorúan monoton, azaz $F(x_1) < F(x_2)$, ha $x_1 < x_2$, mert minden (x_1, x_2) intervallum tartalmaz a belsejében racionális pontot.

2. Az egységintervallumra egyenletes eloszlással ledobunk egy pontot, azaz annak valószínűsége, hogy a pont egy $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba esik $b - a$, valamint ettől függetlenül egy szabályos pénzdarabot. Ha fej a pénzdobás eredménye, akkor legyen a nyereményünk a leesési hely értékével egyenlő, ha pedig írást dobunk, akkor legyen a nyereményünk a dobás értékétől függetlenül $\frac{1}{2}$. Számoljuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Nyereményünk eloszlásfüggvénye $F(x) = \frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}F_2(x)$, ahol $F_1(x)$ az egyenletes eloszlásfüggvény, és $F_2(x)$ egy olyan (elfajult) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, amelyik 1 valószínűséggel az $\frac{1}{2}$ értéket veszi fel. Ugyanis $\frac{1}{2}F_1(x)$ annak a valószínűsége, hogy fej a pénzdobás eredménye, és nyereményünk kisebb, mint x, míg $\frac{1}{2}F_2(x)$ annak a valószínűsége, hogy írás a pénzdobás eredménye, és nyereményünk értéke kisebb, mint x. Jelölje η nyereményünk értékét. Ekkor

$$E\eta = \int xF(\,dx) = \frac{1}{2}\int xF_1(\,dx) + \frac{1}{2}\int xF_2(\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E\eta^2 = \int x^2F(\,dx) = \frac{1}{2}\int x^2F_1(\,dx) + \frac{1}{2}\int x^2F_2(\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{24}.$$

   Innen $E\eta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Házi feladat.

Az egységintervallumra ledobunk egymástól függetlenül egyenletes eloszlással két pontot, és legyen a két dobás eredménye ξ_1 és ξ_2. Ezenkívül feldobunk (a többi kisérlettől függetlenül) egy szabályos dobókockát. Ha hatost dobunk legyen nyereményünk értéke $\max(\xi_1, \xi_2)$, ha nem hatost, akkor pedig $\min(\xi_1, \xi_2)$. Számítsuk ki nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

3. Ha az $F_1(x), \dots, F_k(x)$ függvények egyváltozós eloszlásfüggvények, akkor szorzatuk, az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_k)$ függvény k-változós eloszlásfüggvény.

Megoldás: Először értsük meg a feladatot. Az első előadáson megfogalmaztuk azokat a tulajdonságokat, melyek jellemzik az eloszlásfüggvényeket. Azt kell megmutatni, hogy ha az $F_1(x), \dots, F_k(x)$ függvények kielégítik az egyváltozós eloszlásfüggvényekre előírt tulajdonságokat, akkor az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvény teljesíti a k-változós eloszlásfüggvényekre előírt tulajdonságokat. Ezek egyszerűen ellenőrizhetőek, az egyetlen tulajdonság, melynek indoklásán kissé el kell gondolkozni a következő (iv) feltételnek nevezett tulajdonság:

Definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_k, b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j = \, a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)} F(u_1, \dots, u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \dots, u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K}) \geq 0$ minden $\mathbf{K}$ téglatestre.

Azt kell észrevenni, hogy jelen esetben a $\mu_F(\mathbf{K})$ kifejezés egyszeűen felírható. Nevezetesen, a bevezetett jelöléseket alkalmazva: $\mu_F(\mathbf{K}) = \prod_{j=1}^{k} (F_j(b_j) - F_j(a_j))$, ahonnan következik a kívánt tulajdonság.

Egy más lehetséges megoldás: Elegendő megmutatni, hogy az adott feltételek mellett létezik egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és rajta olyan $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ változók, melyeknek eloszlásfüggvénye az $F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvény. Tekintsünk minden $j = 1, \dots, k$ számra $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j)$ egy valószínűségi mezőt és rajta egy $\xi_j(\omega_j)$ valószínűségi változót, melynek az eloszlásfüggvénye $F_j(x)$. Tekintsük ezen valósszínűségi mezők $(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k, \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_k, \mu_1 \times \cdots \times \mu_k)$ szorzatát, és azon az $\eta_j(\omega_1, \dots, \omega_k) = \xi_j(\omega_j)$, $1 \leq j \leq k$, valószínűségi változókat. Nem nehéz belátni, hogy ezen valószínűségi változóknak az eloszlásfüggvénye az $F(x_1, \dots, x_k) = F_1(x_1) \cdots F_k(x_k)$ függvény. Viszont ez a megoldás felhasznált egy nem triviális mértékelméleti eredményt arról, hogy lehet tekinteni valószínűségi mezők szorzatát, mint új valószínűségi mezőt.

Szerepelt az előadáson a következő két eredmény:

Tétel A. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $B_1, \dots, B_n$ a számegyenes Borel mérhető részhalmazai. Ekkor*

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n).$$

Tétel B. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független k-dimenziós) valószínűségi változók, (k tetszőleges pozitív egész szám, és $g_1, \dots, g_n$ valós értékű függvények a k-dimenziós euklidészi téren. Ekkor*

$$E\left(g_1(\xi_1(\omega) \cdots g_n(\xi_n(\omega))\right) = Eg_1(\xi_1(\omega)) \cdots Eg_n(\xi_n(\omega)).$$

A fenti azonosság úgy értendő, hogy amennyiben az egyik oldalon szereplő kifejezés értelmes, akkor a másik oldalon szereplő kifejezés is értelmes, és egyenlő vele.

4. Mutassuk meg, hogy a Tétel A. következik a Tétel B.-ből.

   Megoldás: Definiáljuk a $g_j(x)$ függvényt, mint az B_j halmaz indikátorfüggggvényét, $1 \le j \le k$, azaz legyen $g_j(x) = 1$, ha $x \in B_j$, és $g_j(x) = 0$, ha $x \notin B_j$, $1 \le j \le k$. Ilyen választással $E\left(g_1(\xi_1(\omega) \cdots g_n(\xi_n(\omega))\right) = P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n)$, és $Eg_1(\xi_1(\omega)) \cdots Eg_n(\xi_n(\omega)) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$. Ezért a Tétel B-ben felírt azonosságból következik a Tétel A-ban szereplő azonosság.

5. Bizonyítsuk be az alábbi az előadáson szerepelt tételt a Fubini tétel segítségével:

Tétel. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+k}$ független valószínűségi változók egy $\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, $f(x_1, \dots, x_k)$ tetszőleges (mérhető) k-változós függvény. Definiáljuk az $\eta = f(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+k})$ valószínűségi változót, amelyik nem függ az első n $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változótól. Ekkor a $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta$ valószínűségi változók függetlenek.*

   Megoldás: Rögzítve valamely $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ számokat vezessük be a következő függvényeket: $g_j(u) = 1$, ha $u \le x_j$, és $g_j(u) = 0$, ha $u \ge x_j$, $1 \le j \le n$; $h(v_1, \dots, v_k) = 1$, ha $f(v_1, \dots, v_k) < x_{n+1}$, és $h(v_1, \dots, v_k) = 0$, ha $f(v_1, \dots, v_k) \ge x_{n+1}$. Ekkor a Fubini tétel alapján felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&R(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n, \eta < x_{n+1}) \\
&\quad = \int g_1(u_1) \cdots g_n(u_n) h(u_{n+1}, \dots, u_{n+k}) F_1(du_1) \cdots F_{n+k}(du_{n+k}) \\
&\quad = \int g_1(u_1) F_1(du_1) \cdots \int g_n(u_n) F_n(du_n) \\
&\qquad\quad \int h(u_{n+1}, \dots, u_{n+k}) F_{n+1}(du_{n+1}) \cdots F_{n+k}(du_{n+k}) \\
&\quad = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n) P(\eta < x_{n+1}),
\end{aligned}$$

   ahol F_j jelöli a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és ezt kellett belátni.

6. Bizonyítsuk be az előadáson megfogalmazott $(E\xi)^2 \le E\xi^2$ és $|E\xi E\eta| \le \sqrt{E\xi^2 E\eta^2}$ egyenlőtlenségeket, melyeket egyébként Schwarz vagy Cauchy–Schwartz egyenlőtlenségnek is szoktak nevezni.

Megoldás: Az itteni feladat tulajdonképpen az analízisben tanultak ismétlése. Az alábbiakban a valószínűségszámítás jelölésrendszerét fogjuk használni, de az ott szereplő várható értékeket integrál formában felírva megkapjuk az analízisban szereplő bizonyítást. Jegyezzük meg, hogy ezen számolásokban sehol nem használjuk ki, hogy a valószínűségi (azaz egyre normált) mérték szerint integrálunk.

Felírhatjuk az $0 \le E(\xi+\lambda\eta)^2 = E\xi^2 + 2\lambda E\xi\eta + \lambda^2 E\eta^2$ azonosságot tetszőleges λ számra. Természetes ezt a λ paramétert úgy választani, hogy a lehető legélesebb egyenlőtlenséget kapjuk. Egy másodfokú polinom szélsőértékének a meghatározása azt sugallja, hogy válasszuk a $\lambda = -\dfrac{E\xi\eta}{E\eta^2}$ számot. Ilyen választással és $E\eta^2$-vel beszorozva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $E\xi^2 E\eta^2 - 2(E\xi\eta)^2 + (E\xi\eta)^2 \ge 0$, ami ekvivalens a második egyenlőtlenséggel. Ez az egyenlőtlenség a speciális $\eta = \xi$ választással megadja az első egyenlőtlenséget is.

7. Mutassunk példát olyan $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókra, melyek nem függetlenek, viszont teljesítik a $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$ azonosságot minden $1 \le j < k \le n$ számpárra, ezért

$$\operatorname{Var}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n) = c_1^2 \operatorname{Var}\xi_1 + c_2^2 \operatorname{Var}\xi_2 + \cdots + c_n^2 \operatorname{Var}\xi_n$$

minden valós $c_1, \dots, c_n$ számsorozatra.

Megoldás: Tekintsük például a következő példát: $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 2\pi), \mathcal{B}, \lambda)$, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra a $[0, 2\pi)$ intervallumon, és λ a Lebesgue mérték osztva 2π-vel. Definiáljuk a $\xi_k(x) = \cos kx$ valószínűségi változókat ezen a téren. Ekkor mint azt analízisből tanultuk $E\xi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx = 0$, $E\xi_j\xi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx\, dx = 0$, ha $j \ne k$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $j \ne k$. (Ezeket a függvényeket kiegészíthetjük a $\sin kx$ függvényekkel is, és hasonlóan konstruálhatunk példát tetszőleges az azonosan 1 függvényt is tartalmazó ortogonális függvények rendszerét is felhasználva.) A tekintett valószínűségi változók nem függetlenek. Ez látható például onnan, hogy $\xi_2 = 2\xi_1^2 - 1$, ami nem más mint a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ azonosság felírása ebben a jelölésrendszerben.

8. Mutassunk példát három olyan ξ_1, ξ_2, ξ_3 (nem független) valószínűségi változóra, melyekre $E\xi_1\xi_2 = E\xi_1 E\xi_2$, $E\xi_1\xi_3 = E\xi_1 E\xi_3$, $E\xi_2\xi_3 = E\xi_2 E\xi_3$, de $E\xi_1\xi_2\xi_3 \ne E\xi_1 E\xi_2 E\xi_3$.

Megoldás: Tekintve függvények egy ortogonális rendszerét kaphatunk ilyen példát, mert tipikusan a háromtagú szorzatra már nem teljesül a független valószínűségi változók szorzatára teljesülő azonosság. A következő példa könnyen ellenőrizhetően teljesíti a kívánt feltételeket: Legyen η_1, η_2, eta_3 három független valószínűségi változó, melyekre $\eta_j =$, $\eta_j^2 \ne 0$, $1 \le j \le 3$. Definiáljuk a $\xi_1 = \eta_2\eta_3$, $\xi_2 = \eta_1\eta_3$, $\xi_3 = \eta_1\eta_2$ valószínűségi változókat. Ekkor könnyen ellenőrizhető az η_j valószínűségi változók függetlenségét felhasználva, hogy $E\xi_1 = E\xi_2 = E\xi_3 = 0$, és $E\xi_1\xi_2 = E\xi_1\xi_3 = E\xi_2\xi_3 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a kívánt azonosságok teljesülnek. Viszont $E\xi_1\xi_2\xi_3 = E\eta_1^2\eta_2^2\eta_3^2 = E\eta_1^2 E\eta_2^2 E\eta_3^2 > 0$, ezért $E\xi_1\xi_2\xi_3 \ne E\xi_1 E\xi_2 E\xi_3$.