**A szeptember 24.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai**

1. Legyen $\xi$ és $\eta$ két független valószínűségi változó, $\xi$ standard normális eloszlásfüggvénnyel, azaz $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ sűrűségfüggvénnyel, $\eta$ pedig legyen egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Szúmítsuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

   *Megoldás:* Jelölje $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$, ha $x > 1$ vagy $x < 0$ az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét, $g(x)$ $\xi + \eta$ keresett sűrűségfüggvényét. Ekkor

$$g(x) = f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-y)^2/2}\,dy$$
$$= -\int_x^{x-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,dy = \Phi(x) - \Phi(x-1),$$

   ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggény. (Ezt az integrált nem lehet zárt alakban kiintegrálni, ezért ezt a kifejezést tekinthetjük végeredménynek is.

2. Mutassunk példát $F_n(x)$ eloszlásfüggvények olyan sorozatára, melyek eloszásban konvergálnak a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényéhez, mindegyik $F_n(x)$ eloszlásfüggvénynek van $f_n(x)$ sűrűségfüggvénye, és ezek a sűrűségfüggvények majdnem minden $x$ pontban a nullához tartanak. (A feladat mondanivalója az, hogy az eloszlásfüggvények konvergenciájából nem következik a sűrűségfüggvények konvergenciája. Azt, hogy az ellenkező irányban más a helyzet a feladatot követő nem kötelező házi feladat mondja ki.)

   *Megoldás:* Definiáljuk az $F_n(x)$ eloszlúsfüggvényt a következő módon: Legyen $F_n(x) = k2^{-n}$ a $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n} - 2^{-10n}]$ intervallumokon, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, $F(x) = 1$, ha $x \ge 1$, $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, és legyen az $F(x)$ függvény lineáris a $(k+1)2^{-n} - 2^{-10n}, (k+1)2^{-n}]$, $k = 0, 1, \dots, 2^n = 1$ intervallumokon. Ekkor az $F_n(x)$ eloszlássüggvények nyílván konvergálnak az $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényéhez. Másrészt az $F_n(x)$ eloszlásfüggvény sűrűségfüggvénye a $[0,1]$ intervallum egy $1 - 2^{9n}$ mértékű részhalmazán nulla, (a maradék $2^{-9n}$ mértékű halmazon $2^{9n}$.) Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-9n} < \infty$, ezért a Borel–Cantelli lemma szerint a (Lebesgue mérték szerint) majdnem minden $x$ számra az $f_n(x)$ sűrűségfüggvény véges sok $n$ indexet kivéve nulla, és az ilyen $x$ számokra $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Innen következik a feladat állítása.

   *Nem kötelező házi feladat:*

   Tegyük fel, hogy $g_n(x)$ sűrűsségfüggvények egy sorozata majdnem minden $x$ pontban konvergál egy $g(x)$ sűrűségfüggvényhez. Lássuk be, hogy ekkor a $G_n(x) = \int_{-\infty} x g_n(u)\,du$ eloszlásfüggvények konvergálnak a $G(x) = \int_{-\infty} x g(u)\,du$ eloszlásfüggvényhez.

3. Legyen $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye a $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ függvény, és legyen $t$ valós szám. Számoljuk ki az

$e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.

*Megoldás:* Ha $\xi$ $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó $h(x)$ valós értékű (mérhető) függvény, akkor $Eh(\xi) = \int h(x)f(x)\,dx$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha $\xi$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$

Innen

$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t^2/2-(t-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}.$$

4. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 10-szer egymástól függetlenül. Tekintsük a páros eredményű dobások összegének a harmadik hatványát, és számoljuk ki annak várható értékét.

   *Megoldás:* Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a $j$-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a $j$-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a $j$-ik dobás eredménye 6, és $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik dobás eredménye 1, 3, vagy 5. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$. Ekkor minket az $ES^3$ mennyiség érdekel. $ES^3 = E\left(\sum\limits_{j=1}^{10}\xi_j\right)^3$.

   Továbbá, $E\xi_j = 2$, $E\xi_j^2 = \dfrac{28}{3}$, $E\xi_j^3 = 48$ minden $1 \le j \le 10$ számra, és a $\xi_j$ valószínűségi változók függetlenek. Ezért

$$\begin{aligned} ES^3 &= \sum_{\substack{1\le j,k,l\le 10\\ \text{a } j,k,l \text{ indexek különbözőek}}} E\xi_j E\xi_k E\xi_l + \sum_{\substack{1\le j,k\le 100\\ \text{a } j,k \text{ indexek különbözőek}}} E\xi_j^2 E\xi_k + \sum_{j=1}^{10} E\xi_j^3 \\ &= 10\cdot 9\cdot 8\cdot 2^3 + 3\cdot 10\cdot 9\cdot 2\cdot\frac{28}{3} + 10\cdot 48 = 11280. \end{aligned}$$

5. Legyenek $\xi$ és $\eta$ független valószínűségi változók, a $\xi$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, az $\eta$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $0 \le x \le 1$ intervallumban, azaz $\eta$ sűrűségfüggvénye $g(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$ egyébként. Számítsuk ki a $\xi - \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

   *Megoldás:* Jelölje $g^-(\cdot)$ a $-\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ekkor felírhatjuk, hogy $g^-(x) = 1$, ha $-1 \le x \le 0$, $g^-(x) = 0$ egyébként, és a $\xi - \eta = \xi + (-\eta)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $h(x) = f * g^-(x)$ függvény, ahol $*$ konvolúciót jelöl. Másrészt, mivel $g^-(x-y) = 1$, ha $x \le y \le x+1$, és $g^-(x-y) = 0$ különben, ezért

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g^-(x-y)\,dy = \int_x^{x+1} f(y)\,dy = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy.$$

Válasszuk szét a következő három esetet: a.) $x < -1$, b.) $-1 \leq x \leq 0$, c.) $x > 0$. Az a.) esetben, ha $x < -1$ $h(x) = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy = \int_x^{x+1} e^y\,dy = e^{x+1} - e^x$, a b.) esetben, ha $-1 \leq x \leq 0$ $h(x) = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy = \int_x^0 e^y\,dy + \int_0^{x+1} e^{-y}\,dy = 1 - e^x + 1 - e^{-x-1} = 2 - e^{-x-1} - e^x$, a c.) esetben, ha $x > 0$ $h(x) = \int_x^{x+1} e^{-|y|}\,dy = \int_x^{x+1} e^{-y}\,dy = e^{-x} - e^{-x-1}$.