A április 15.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Először néhány példát mutatunk a centrális határeloszlástétel alkalmazására.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk 1200 alkalommal egymástól függetlenül, és összeadjuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 2280 és 2500 közé esik.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 1200$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a $P\left(2280 \le \sum\limits_{j=1}^{1200} \xi_j \le 2500\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Vegyük észre, hogy $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{6}(4+16+36) - 4 = \frac{16}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(2280 \le \sum_{j=1}^{1200} \xi_j \le 2500\right) = P\left(\frac{-120}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{1200} \xi_j - \sum\limits_{j=1}^{1200} E\xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{1200} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{100}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}}\right)$$
$$\sim \Phi(1.25) - \Phi(-1.5) = 0.8944 + 0.9322 - 1 = 0.8266.$$

2. Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is vesztünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, és η_j $1 \le j \le 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j = 1$, ha a j-ik érmedobás eredménye fej, és $\eta_j = 0$, ha a j-ik érmedobás írás. Legyen $\zeta_j = \xi_j\eta_j$. Ekkor a j-ik dobásnál a nyereményünk ζ_j lesz, $1 \le j \le 3300$, és a $P\left(3190 \le \sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független ζ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j = E\xi_j\eta_j = E\xi_j E\eta_j = \frac{1}{6}(2+4+6)\frac{1}{2} = 1$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36) \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$, $\operatorname{Var}\zeta_j^2 = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \le \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum\limits_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3300} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{220}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}}\right)$$

$$\sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

3. Vegyünk egy olyan pénzdarabot, amely $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az írás oldalra. Ezt a pénzdarabot annyiszor dobjuk fel, ameddig megjelenik 1200 fej dobás. Mi annak a valószínűsége, hogy az elvégzett dobások száma 1680 1830 küzé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést.

   Megoldás: Az elvégzett dobások száma egy η negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 1200$ és $p = \frac{2}{3}$ paraméterekkel, azaz $P(\eta = k + n) = \binom{n+k-1}{n-1}(1-p)^k p^n$, $p = \frac{2}{3}$, és $n = 1200$ paraméterrel. Egy ilyen valószínűségi változónak ki lehet számolni a pontos eloszlását, azaz azt, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel. Elvileg, ez lehetőséget ad a kívánt valószínűség kiszámítására egy bonyolult összeg kiszámításának a segítségével. Ennél hasznosabb becslést tudunk kapni a következő érvelés segítségével, amely a kívánt valószínűséget jó pontossággal kiszámítja a centrális határeloszlástétel segítségével.

   Jelölje ξ_j, $2 \le j \le 1200$, a $j-1$-ik és j-ik fejdobás közötti dobások számát (a j-ik fejdobást beleszámítjuk a $j-1$-iket viszont nem számítjuk bele e dobások közé), és legyen ξ_1 az első fejdobásig (ezt is beleszámítva) elvégzett dobások száma. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, negatív binomiális eloszlásúak $n = 1$, $p = \frac{2}{3}$ paraméterekkel, és minket a $P(1680 < \xi_1 + \cdots + \xi_{1200} < 1830)$ valószínűség érdekel. Megmutattuk a 6. előadásban, illetve a hozzátartozó feladatokban), hogy $E\xi_j = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1-p}{p^2} = \frac{3}{4}$. Ezért a centrális határeloszlástétel alapján $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{1200}$ jelöléssel minket a $P\left(-4 < \frac{\eta - 1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}} < 1\right)$ valószínűség érdekel. A centrális határeloszlástétel alapján $P\left(-4 < \frac{\eta - 1200E\xi_1}{\sqrt{1200\operatorname{Var}\xi_1}} < 1\right) \sim \Phi(1) + \Phi(4) - 1 \sim \Phi(1)$.

4. Legyen birtokunkban 100 lámpa, amelyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

Megoldás: Jelölje ξ_j a j-ik lámpa élettartamát, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűségre kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \cdots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \dfrac{m}{\lambda} = 1000$, $\operatorname{Var}\eta = \dfrac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \dfrac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} = \dfrac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \cdots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\dfrac{\eta - E\eta}{\sqrt{\operatorname{Var}\eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

5. Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, amely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kell választanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum\limits_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\dfrac{3}{4}$, $E\xi_j = \dfrac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \dfrac{3}{16}$, $ES = 30\,000 E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000 \operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k - 22\,500}{75}\right)$$
$$\sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\dfrac{k - 22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\dfrac{22\,500 - k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\dfrac{22\,500 - k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \times 1.28$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \times 1.28 = 22\,212$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge \dfrac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

Házi feladat.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik.

6. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.
Megoldás:

$$\begin{aligned} Ee^{t\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tu-u^2/2-t^2/2+t^2/2}\, du \\ &= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-u)^2/2}\, du = e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

7. Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.
Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \ge 0$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \dfrac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f(x) = g * g(x) &= \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du \\ &= e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \ge 0, \end{aligned}$$

és $f(x) = 0$, ha $x \le 0$.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Vagyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (v - \frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2v-1)^2}},$$

ezért $u = 2v - 1$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv &= \int_{-1}^{2x-1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-u^2}}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\arcsin x\right]_{-1}^{2x-1} = \frac{\arcsin(2x-1) + \frac{\pi}{2}}{2\pi}. \end{aligned}$$

Innen következik, hogy a tekintett integrál értéke $x = 1$ esetén $\frac{1}{2}$, mivel $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

8. Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

   A megoldás kidolgozása előtt tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó ξ és η, amelyek (együttes) sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\dfrac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v) = g_x(u,v)$ függvényt, amely a síkon az $\left\{(u,v)\colon \dfrac{v}{u} < x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v) = 1$, ha $\dfrac{v}{u} < x$, és $g(u,v) = 0$, ha $\dfrac{v}{u} \ge x$. Ekkor $P\left(\dfrac{\eta}{\xi} < x\right) = Eg(\xi,\eta) = \int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv = \int\int_{\{(u,v)\colon\, \frac{v}{u}<x\}} f(u,v)\,du\,dv$. Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

   Megoldás. A feladatben vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}F(x) = P\left(\frac{\eta}{\xi} < x\right) &= \iint_{v<xu} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv \\ &= 2\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x} \int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan x} d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.\end{aligned}$$

   Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az r Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső r változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty = 1$.
   Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

   Második megoldás. A (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ,η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\dfrac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\eta}{\xi} < x\right) &= P\left((\xi,\eta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \arctan x\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \arctan x + \pi\right) \text{szögtartományban}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}2\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.\end{aligned}$$

9. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként. Számítsuk ki a ξ^2 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Első megoldás: $\operatorname{Var}\xi^2 = E\left(\left(\xi^2\right)^2\right) - \left(E\xi^2\right)^2 = E\xi^4 - \left(E\xi^2\right)^2 = \int x^4 f(x)\,dx - \left(\int x^2 f(x)\,dx\right)^2$, ahol $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként, azaz $f(x)$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Innen $E\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, és $\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$.

Második megoldás: Számítsuk ki először a ξ^2 valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét. A ξ^2 valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(0 \le \xi \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad \text{ha } 0 \le x \le 1,$$

$F(x) = 0$, ha $\xi < 0$, $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen a ξ^2 valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Ezért

$$E\xi^2 = \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

és

$$\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}.$$

10. Legyen (ξ,η) két-dimenziós valószínűségi változó $f(x,y)$ sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be, hogy a $\frac{\eta}{\xi}$ valószínűségi változónak is létezik sűrűségfüggvénye, és az a $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,tx)|x|\,dx$ függvény. Adjunk ennek az eredménynek a segítségével új megoldást a nyolcadik feladatra.

Megoldás: Jelölje $G(t)$ a $\frac{\eta}{\xi}$ tört $G(t) = P\left(\frac{\eta}{\xi} < t\right)$ eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$G(t) = \int_{(x,y)\colon\ \frac{y}{x}<t} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Számítsuk ki ezt az integrált az $(x,z) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$ helyettesítéssel. Ekkor a $G(t)$ függvényt kifejező integrálban az új integrálási tartomány az $\{(x,z)\colon -\infty < x < \infty, -\infty < z < t\}$, $f(x,y) = f(x,zx)$, és az integráltranszformáció kiszámításához meg kell határoznunk a leképezés Jacobi transzformációját. Ez az $x = h_1(x,y) = x$, $z = h_2(x,y) = \frac{y}{x}$ jelöléssel

$$J(x,z) = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x)}{\partial x}, \frac{\partial x)}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{z}{\partial y}, \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y}, \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{y}{x^2}, & \frac{1}{x} \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|,$$

és informálisan $dx\,dz = J(x,z)\,dx\,dy$, ahonnan $dx\,dy = \dfrac{1}{J(x,z)}\,dx\,dz = |x|\,dx\,dz$, ahonnan

$$G(t) = \int_{(x,y)\colon\ \frac{y}{x}<t} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{(x,z)\colon\ z<t} f(x,zx)|x|\,dx\,dz = \int_{-\infty}^{t} K(z)\,dz,$$

ahol

$$K(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(xz,z)|x|\,dx.$$

Innen látható, hogy a keresett sűrűségfüggvény $g(t) = K(t)$, amint állítottuk. Ha ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor (ξ,η) sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ezért $\dfrac{\eta}{\xi}$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+t^2x^2)/2}|x|\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi(t^2+1)} e^{-(\sqrt{(t^2+1)}x)^2/2} \left|\left(\sqrt{(t^2+1)}x\right)\right| d\left(\sqrt{(t^2+1)}x\right), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi(t^2+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}|x|\,dx = \frac{1}{\pi(t^2+1)} \int_0^{\infty} e^{-x^2/2}|x|\,dx \\ &= \frac{1}{\pi(t^2+1)} \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(t^2+1)}. \end{aligned}$$

AZ ÁPRILIS 9.-I JAVÍTÓ DOLGOZAT FELADATAI

1. Két szabályos dobókockát feldobunk egymás után 100-szor egymástól függetlenül. Minden egyes dobás után felírjuk egy papírra a nagyobb dobás eredményét. (Ha a két kockadobás eredménye megegyezik, akkor ezt a közös dobáseredményt írjuk fel.) Mi a papírra felírt számok összegének a várható értéke és szórásnégyzete?
2. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk egymás után 14 alkalommal. Összeszámoljuk azt, hogy hányszor következett be három egymást követő fej-dobás. (Az ilyen dobássorozatok nem feltétlenül diszjunktak. Például, ha az első 5 dobás fej, az három ilyen sorozatot jelent, az 1,2,3, a 2,3,4 és a 3,4,5 sorozatokat.) Mi a várható értéke és szörásnégyzete az ilyen dobássorozatok számának?
3. Egy teszt-vizsgán, ahol három lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ ketten vesznek részt. Az első résztvevő p_1, a második résztvevő pedig p_2 valószínűséggel tudja a helyes választ, továbbá a vizsga két résztvevője egymástól függetlenül tudja vagy nem tudja, hogy mi a helyes válasz. Mindkét résztvevő a jó választ jelöli meg, ha tudja azt, ellenkező esetben pedig mindentől függetlenül egyforma

valószínűséggel véletlenül bejelöli a három lehetséges válasz valamelyikét. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két résztvevő a helyes választ jelölte be, feltéve, hogy ugyanazt a választ adta?

4. Legyen ξ és η két független Poisson eloszlású valószínűségi változó, λ és μ paraméterekkel, azaz $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $P(\eta = k) = \dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, és $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Számítsuk ki $\xi + \eta$ eloszlását, azaz a $P(\xi + \eta = k)$ valószínűségeket.
5. Fogalmazza meg a Borel–Cantelli lemmát. (Arról az eredményről van szó, amely feltételt ad arra, hogy bizonyos eseményekből végtelen vagy csak véges sok következik-e be.)

Megoldások:

1. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = s$, $1 \le s \le 6$, ha a j-ik dobássorozat után felírt szám s. Vegyük észre, hogy a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, és $P(\xi_j = 1) = \frac{1}{36}$, $P(\xi_j = 2) = \frac{3}{36}$, $P(\xi_j = 3) = \frac{5}{36}$, $P(\xi_j = 4) = \frac{7}{36}$, $P(\xi_j = 5) = \frac{9}{36}$, $P(\xi_j = 6) = \frac{11}{36}$. (Ugyanis minden (u, v), $1 \le u, v \le 6$ dobáspár valószínűsége $\frac{1}{36}$, a maximum úgy lehet s, ha vagy az első dobás s a második dobás kisebb mint s, ami $s-1$-féleképp történhet, vagy a második dobás s az első dobás kisebb mint s, ami szintén $s-1$-féleképp történhet, vagy mind a két dobás s. Ez pontosan $2s-1$ lehetőséget jelent. Innen $E\xi_j = \dfrac{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11}{36} = \dfrac{161}{36}$, $E\xi_j^2 = \dfrac{1 + 4\cdot 3 + 9\cdot 5 + 16\cdot 7 + 25\cdot 9 + 36\cdot 11}{36} = \dfrac{791}{36}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \dfrac{791}{36} - \left(\dfrac{161}{36}\right)^2 = \dfrac{2551}{1296}$ minden $1 \le j \le 100$ számra, ahonnan a minket érdeklő $S = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ összegre $ES = 100E\xi_1 = \dfrac{16100}{36}$, $\operatorname{Var} S = 100\operatorname{Var}\xi_j = \dfrac{255100}{1296}$.
2. Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, amely 1, ha a j-ik, $j+1$-ik, $j+2$-ik dobások mindegyike fej, $1 \le j \le 12$, és nulla különben. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{12} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{8}$ minden $1 \le j \le 12$ számra, ezért $ES = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$. A szórásnégyzet kiszámítása érdekében számítsuk ki a $\operatorname{Var}\xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciákat. Felírhatjuk, hogy $\operatorname{Var}\xi_j = \dfrac{7}{64}$ minden $1 \le j \le 12$ számra, továbbá a ξ_j és ξ_k valószínűségi változók függetlenek, ha $|j-k| \ge 3$, ezért $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $|k-j| \ge 3$. Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1}) = E\xi_j\xi_{j+1} - E\xi_j E\xi_{j+1} = \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{64} = \dfrac{3}{64}$, $1 \le j \le 11$, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+2}) = E\xi_j\xi_{j+2} - E\xi_j E\xi_{j+2} = \dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{64}$, $1 \le j \le 10$. Innen

$$\operatorname{Var} S = \sum_{j=1}^{12} \operatorname{Var}\xi_j + 2 \sum_{1\le j<k\le 12} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 12 \cdot \frac{7}{64} + 2\cdot 10 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot 11 \cdot \frac{3}{64}$$

$$= \frac{42 + 10 + 33}{32} = \frac{85}{32}.$$

3. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első diák jól válaszol, B azt az eseményt, hogy a második diák jól válaszol, D_1 azt az eseményt, hogy mind a két jelölt az elsőként felsororolt feltüntetett rossz választ D_2 pedig azt az eseményt, hogy mind a két jelölt a másodiknak felsorolt rossz választ adja. Ekkor $C = (A \cap B) \cup D_1 \cup D_2$ jelöli azt az eseményt, hogy a két diák egyformán válaszol. Ekkor minket a $P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap B)}{P((A \cap B) \cup D_1 \cup D_2)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(A) = p_1 + \frac{1}{3}(1 - p_1) = \frac{1 + 2p_1}{3}$, $P(B) = \frac{1 + 2p_2}{3}$, és az A és B események függetlenek. Innen $P(A \cap B) = \frac{1 + 2p_1}{3} \cdot \frac{1 + 2p_2}{3}$, $P(C) = R(A \cap B) + (D_1) + P(D_2) = \frac{1 + 2p_1}{3} \cdot \frac{1 + 2p_2}{3} + 2\frac{1 - p_1}{3} \cdot \frac{1 - p_2}{3}$. Ugyanis $P(D_1) = P(D_2) = \frac{(1 - p_1)}{3} \cdot \frac{(1 - p_2)}{3}$, mivel az első jelölt akkor adja az első rossz választ, ha nem tudja a helyes választ, és a három lehetőség közül az első rossz választ jelöli ki, aminek a valószínűsége $(1 - p_1)\frac{1}{3}$, annak a valószínűsége, hogy a második jelölt ugyanezt a választ adja $(1 - p_1)\frac{1}{3}$, a két jelölt egymástól függetlenül válaszol. Innen $P(D_1) = \frac{(1 - p_1)}{3} \cdot \frac{(1 - p_2)}{3}$. Hasonlóan, a $P(D_2)$ valószínűségre ugyanazt az értéket kapjuk. Innen

$$P(A \cap B|C) = \frac{(1 + 2p_1)(1 + 2p_2)}{(1 + 2p_1)(1 + 2p_2) + 2(1 - p_1)(1 - p_2)}.$$

4.

$$P(\xi + \eta = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j)P(\eta = k - j)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k - j)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k - j)!} \lambda^j \mu^{(k-j)}$$
$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k.$$

5. Legyenek $A_1, A_2, \dots$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. A Borel–Cantelli lemma a következő két állítást tartalmazza:

a.) Ha $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$, akkor az A_1, A_2, $\dots$ események közül 1 valószínűséggel véges sok következik be.

b.) Ha $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$, és az A_1, A_2, $\dots$ események függetlenek, akkor az A_1, A_2, $\dots$ események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be.