A április 29-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

1. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, melyek közül ξ Poisson eloszlású λ paraméterrel, azaz $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra, η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, melyre $f(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, és $f(u) = 0$, ha $u > 1$, vagy $u < 0$. Lássuk be, hogy a $\xi + \eta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, és határozzuk meg azt.
   Megoldás: Legyen $[a, b]$ egy olyan intervallum, melyre $[a, b] \subset [n, n + 1]$ valamely nem negatív egész n számra. Ekkor
   $$\begin{aligned} P(\xi + \eta \in [a, b]) &= P(\xi = n, \eta \in [a - n, b - n]) = P(\xi = n)P(\eta \in [a - n, b - n]) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(b - a) = \int_a^b f(u)\,du, \end{aligned}$$
   ahol $f(u) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, ha $u \in [n, n + 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Legyen továbbá $f(u) = 0$, ha $u \le 0$. Ebből a relációból, illetve abból a tényből, hogy $P(\xi + \eta \le 0) = 0$, következik, hogy $P(\xi + \eta < x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a fent definiált $f(\cdot)$ függvénnyel, tehát ez a $\xi + \eta$ valószínűségi változó (létező) sűrűségfüggvénye.
2. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, amelyek közül ξ Poisson eloszlású λ paraméterrel, azaz $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra, η egyenletes eloszlású a $[0, 2]$ intervallumon, azaz létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, amelyre $f(u) = \dfrac{1}{2}$, ha $0 \le u \le 2$, és $f(u) = 0$, ha $u > 2$, vagy $u < 0$. Lássuk be, hogy a $\xi + \eta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, és határozzuk meg azt.
   Megoldás: Ennek a feladatnak a megoldása hasonló az előzőhöz. Legyen $[a, b]$ egy olyan intervallum, amelyre $[a, b] \subset [n, n + 1]$ valamely nem negatív egész n számra. Ekkor, ha $n \ge 1$, akkor
   $$\begin{aligned} P(\xi + \eta \in [a, b]) &= P(\xi = n, \eta \in [a - n, b - n]) \\ &\qquad + P(\xi = n - 1, \eta \in [a - n - 1, b - n - 1]) \\ &= P(\xi = n)P(\eta \in [a - n, b - n]) \\ &\qquad + P(\xi = n - 1)P(\eta \in [a - n - 1, b - n - 1]) \\ &= \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-\lambda}\frac{(b - a)}{2} = \int_a^b f(u)\,du, \end{aligned}$$
   ahol $f(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda^n}{n!} + \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-\lambda}$, ha $u \in [n, n + 1]$, $n = 1, 2, \dots$. Hasonlóan,
   $$P(\xi + \eta \in [a, b]) = \frac{1}{2}\int_a^b P(\xi = 0)\,du = \frac{1}{2}\int_a^b e^{-\lambda}\,du,$$
   ha $[a, b] \in [0, 1]$, továbbá $P(\xi + \eta \le 0) = 0$. Innen következik, hogy ha az $f(\cdot)$ függvény definicióját az $f(u) = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda}$, ha $0 \le u \le 1$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$ képletekkel

fejezzük be, akkor $P(\xi+\eta<x)=\int_{-\infty}^x f(u)\,du$ ezzel az $f(\cdot)$ függvénnyel. Tehát ez a $\xi+\eta$ valószínűségi változó (létező) sűrűségfüggvénye a fent definiált $f(\cdot)$ függvény.

3. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $-\infty<x<\infty$. Számítsuk ki a $\xi^2+\xi^4$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: Számítsuk ki először $\xi^2+\xi^4$ $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Ha $x<0$, akkor $G(x)=0$, mert $\xi^2+\xi^4\ge 0$ egy valószínűséggel. Ha $x>0$, akkor a $P(\xi^2+\xi^4<x)$ valószínűségét kell kiszámítanunk. Legyen $u=u(x)$ az $u^2+u-x=0$ egyenlet nagyobb gyöke, aza $u=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Nem nehéz belátni, hogy $\xi^2(\omega)+\xi^4(\omega)<x$ akkor és csak akkor, ha $0\le<\xi^2(\omega)<u(x)$, ami azt jelenti, hogy $-\sqrt{u(x)}<x<\sqrt{u(x)}$. Innen $\xi^2+\xi^4$ eloszlásfüggvénye $x>0$ esetén $G(x)=\Phi\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)=2\Phi\left(\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}\right)-1$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Innen differenciálással kapjuk, hogy $\xi^2+\xi^4$ sűrűségfüggvénye $\dfrac{dG(x)}{dx}$, ahonnan ez a sűrűségfüggvény nulla, ha $x<0$, és $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\exp\left\{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{4}\right\}\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}$, ha $x>0$.

4. Péter és Pál a következő játékot játssza. Mind a ketten feldobnak egy szabályos dobókockát. Ha Pál dobott nagyobbat, akkor ő nyer három forintot Pétertől, ha Péter dobása nagyobb, akkor Pál fizet Péternek három forintot. Ha a dobások egyenlőek, akkor senki sem fizet a másiknak. Ezt a játékot játsszák 3000 alkalommal. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy Péter legalább 90 forintot nyer.

4. Legyen ξ_j Péter nyereménye a j-ik játékban. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, Péter össznyereménye $S=\sum\limits_{j=1}^{3000}\xi_j$, és $P(\xi_j=3)=\dfrac{5}{12}$, $P(\xi_j=-3)=\dfrac{5}{12}$, $P(\xi_j=0)=\dfrac{1}{6}$. (Annak valószínűségét írtuk fel, hogy Péter vagy Pált dob nagyobbat, illetve hogy a két dobás egyenlő. Innen $E\xi_j=0$, $\operatorname{Var}\xi_j=E\xi_j^2=\dfrac{45}{6}$, $ES=0$, $\operatorname{Var}S=15\cdot1500=150^2$. Innen annak valószínűsége, hogy Péter legalább 90 forintot nyer

$$P(S\ge 90)=P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var}S}}\ge\frac{90}{150}\right)=1-P\left(\frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var}S}}<0.6\right)\sim 1-\Phi(0.6)\sim 0.274$$

5. Legyen ξ és η két valószínűségi változó, amelyek együttes eloszlásának (létező) sűrűségfüggvénye $f(u,v)=\frac{2}{3}u+2uv^2+\frac{2}{3}v$ alakú, ha $0\le u,v\le 1$, és $f(u,v)=0$ egyébként. Lássuk be először, hogy $f(u,v)$ valóban sűrűségfüggvény, majd számoljuk ki a $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: Annak érdekében, hogy ellenőrizzük, hogy $f(u,v)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatni, hogy $f(u,v) \geq 0$ (majdnem) minden (u,v) számpárra, és

$$\int\int f(u,v)\,du\,dv = 1.$$

Az nyilvánvaló, hogy $f(u,v) \geq 0$ minden (u,v) számpárra. Másrészt mivel

$$\int_0^1 \int_0^1 uv^2\,du\,dv = \int_0^1 u\,du \int_0^1 v^2\,dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$\int_0^1 \int_0^1 u\,du\,dv = \frac{1}{2}$ és $\int_0^1 \int_0^1 v\,du\,dv = \frac{1}{2}$, ezért $\int\int f(u,v)\,du\,dv = 1$.
A $\xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f(u,v)\,dv \right) du$$

képlet segítségével számíthatuk ki, hasonlóan $1-G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{x-u}^{\infty} f(u,v)\,dv \right) du$. Másrészt, a sűrűségfüggvény $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ formula segítségével kiszámítható. Ez a mi esetünkben a következőt jelenti, $g(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $g(x) = 1$, ha $x \geq 2$, mert $G(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $G(x) = 1$, ha $x \geq 2$. Másrészt

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^1 \int_0^{x-u} \left(\frac{2}{3}u + 2uv^2 + \frac{2}{3}v \right) du \right) dv,$$

ha $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = -\dfrac{d}{dx} \left(\int_0^1 \int_{x-u}^1 \left(\frac{2}{3}u + 2uv^2 + \frac{2}{3}v \right) du \right) dv$, ha $1 \leq x \leq 2$. Azért volt érdemes a $0 \leq x \leq 1$ és $1 \leq x \leq 2$ eseteket szétválasztani, mert a konkrét feladatban a $G(x)$ függvényt tudjuk kényelmesen kiszámítani $0 \leq x \leq 1$ és az $1 - G(x)$ függvényt az $1 \leq x \leq 2$ intervallumban. Ez a szétbontás azonban nem kötelező.
A fent vázolt módon ki lehet számolni a sűrűségfüggvényt, de valójában ezt a számolást lehet egyszerűsíteni. Ez hasonló ahhoz, ahogy a konvolució formulát vezetik le független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényére. Valóban, a v változó $z = u + v$ helyettesítésével felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f(u,v)\,dv \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f(u,z-u)\,dz \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,z-u)\,du \right) dz, \end{aligned}$$

ahonnan deriválással

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,x-u)\,du.$$

E képlettel a számolásokat lehet egyszerűsíteni. Azt kapjuk, hogy jelen esetben $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$, (ebben az esetben a $g(x)$ függvényt kifejező integrálban szereplő integrandus azonosan nulla. Ugyanis $x < 0$ esetében vagy $u < 0$ vagy $x - u < 0$, és $x > 2$ esetben vagy $u > 1$ vagy $x - u > 1$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor

$$g(x) = \int_0^{1-x} \left(\frac{2}{3}u + 2u(x-u)^2 + \frac{2}{3}(x-u) \right) du,$$

ha $1 \le x \le 2$, akkor

$$g(x) = \int_{x-1}^{1} \left(\frac{2}{3}u + 2u(x-u)^2 + \frac{2}{3}(x-u) \right) du.$$

6. Legyen a (ξ, η) vektor egyenlletes eloszlású a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(8,1)$ pontok által meghatározott háromszögön egyenletes eloszlású, azaz legyen sűrűségfüggvénye 2 azon a háromszögön, amelynek ezek a pontok a csúcspontjai, és legyen nulla ezen a háromszögön kívül. Számítsuk ki a ξ és η valószínűségi változók kovarianciáját.
Megoldás: $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, és $E\xi\eta = \int xyf(x,y)\,dx\,dy$,
$E\xi = \int xf(x,y)\,dx\,dy$, $E\eta = \int yf(x,y)\,dx\,dy$, ahol $f(x,y)$ a (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye. Ezért

$$E\xi\eta = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2xy\,dy \right) dx = \int_0^1 2x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$E\xi = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\,dy \right) dx = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \frac{1}{3},$$

és könnyen látható (például szimmetria meggondolásból), hogy $E\eta = E\xi$. Innen $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36}$.

7. Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0,2]$ intervalumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke x-nél kisebb $\frac{x}{2}$-vel egyenlő, ha $0 \le x \le 2$, eggyel egyenlő, ha $x \ge 2$, és nulla, ha $x \le 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, melyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, melyek értéke, nagyobb mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megőrzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével.
Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 24\ 000$, valószínűségi változókat: $\xi_j = x$, ha a j-ik ledobott pont értéke x, és $0 \le x \le 1$, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik ledobott pont értéke az $(1,2]$ intervallumba esik. Ekkor a megőrzött pontok összege $S = \sum\limits_{j=1}^{24\ 000} \xi_j$, továbbá a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma

eloszlásúak. Ezért a centrális határeloszlástétel segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklő $P(5900 < S < 6075)$ valószínűségre. Ennek érdekében ki kell számolnunk a ξ_1 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. Vegyük észre, hogy ugyan a ξ_1 valószínúségi változónak nincs sűrűségfüggvénye, és nem diszkrét eloszláaú, viszont anak F eloszlásfüggvénye felírható $F(x) = F_1(x)+F_2(x)$ alakban, ahol $F_1(x)$ nek van sűrűségfüggvénye, ami az $f(x) = \frac{1}{2}$ függvény a $[0,1]$ intervallumon, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$, és $F_2(x)$ olyan mértéket határoz meg, amelyik a nullába van koncentrálva, és a nulla mértéke $\frac{1}{2}$. Pontosabban, tetszőleges A halmaz valószínűsége $P(A) = \int_A F(\,dx) = \int_A F_1(\,dx) + \int_A F_2(\,dx) = \int_A \frac{1}{2}\,dx + \int_A F_2(\,dx)$, ahol $\int_A F_2(\,dx) = \frac{1}{2}$, ha $0 \in A$, és $\int_A F_2(\,dx) = 0$, ha $0 \notin A$. Ekkor tetszőleges $h(x)$ függvényre $Eh(\xi) = \int h(x)F(\,dx) = \int h(x)F_1(\,dx) + \int h(x)F_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}h(x)\,dx + \frac{1}{2}h(0)$. Ezért

$$E\xi_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4}, \qquad E\xi_1^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{6},$$

$\operatorname{Var}\xi_1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{5}{48}$, és $ES = 6000$, $\operatorname{Var} S = 2500$. Innen

$$\begin{aligned} P(5900 < S < 6075) &= P\left(-2 < \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < 1.5\right) \\ &\sim \Phi(1.5) - \Phi(-2) = \Phi(1.5) + \Phi(2) - 1. \end{aligned}$$