Az április 8.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Feladatok:

1. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.
   Megoldás: $E(\sigma\xi+m) = \sigma E\xi + m = m$, és $\mathrm{Var}\,(\sigma\xi+m) = \sigma^2\mathrm{Var}\,\xi = \sigma^2$. Továbbá, az előző feladat eredménye alapján a $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \dfrac{1}{|\sigma|}\varphi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$, ahol $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, a standard normális sűrűségfüggvény. Innen következik a feladat állítása.

   Házi feladat:

   Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait, azaz egy olyam valószínűségi változó momentumait adjuk meg, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$.

2. Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

   $$P(\xi > x+y|\xi > y) = P(\xi > x)$$

   minden $x \ge 0$ és $y \ge 0$ számra.
   Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \ge 0$ számra, ezért $P(\xi > x+y|\xi > y) = \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

   Nem kötelező házi feladat:

   Ha egy ξ valószínűségi változó teljesűti az örökifjú tulajdonságot, akkor az exponenciális eloszlású.

   Segítség: Azt kell belátni, hogy amennyiben $P(\xi > x+y) = P(\xi > x)P(\xi > y)$ minden $x \ge 0$ és $y \ge 0$ számra, akkor $P(\xi > x) = e^{-\lambda x}$ minden $x \ge 0$ számra. Legyen $P(\xi > x) = e^{-\lambda(x)x}$ valamely $x > 0$ számra. Lássuk be először az $y = \frac{p}{q}x$ alakú számokra, ahol p és q pozitív egész számok, hogy $P(\xi > y) = e^{-\lambda(x)y}$. Végül, mivel $P(\xi > x)$ monoton csökkenő függvény, ezért $\lambda(x) = \lambda$.

3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan ξ valószínűségi változó teljesíti a következő szuper örökifjú tulajdonságot:

   $$P(\xi > x+y|\xi > y) > P(\xi > x)$$

   minden $x > 0$ és $y > 0$ számra.
   Megoldás: Legyen a ξ valószínűségi változó olyan, hogy $P(\xi > x) = e^{-\sqrt{x}}$, ha $x \ge 0$ és $P(\xi > x) = 1$, ha $x < 0$. Ekkor $P(\xi > x+y|x > y) = e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}$,

ha $x > 0$, $y > 0$. Ezért elég megmuatatni, hogy $e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} > e^{-\sqrt{y}}$, illetve hogy $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ez az egyenlőtlenség viszont (négyzetre emelés után) könnyen látható.

4. Adjuk meg a $[0, 1 \times \cdots \times [0, 1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ csúcspontok által meghatározott $\mathbf{K}$ háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek eloszlásfüggvényét.

Megoldás: A $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlása az $F(x_1, \dots, x_k) = G(x_1)\cdots G(x_k)$ függvény, ahol $G(x) = 0$, ha $x \le 0$, $G(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $G(x) = 1$, ha $x \ge 1$.

A tekintett háromszögön definiált egyenletes eloszlás $H(x, y)$ eloszlásfüggvénye, $H(x, y) = 0$, ha $x \le 0$ vagy $y \le 0$. $H(x, y) = 1$, ha ≥ 1 és $y \ge 1$. Definiálni kell még a $H(x, y)$ eloszlásfüggvényt abban az esetben, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$. Ebben az esetben $H(x, y) = 2\lambda([0, x]\times[0, y]\cap\mathbf{K})$. innen $H(x, y) = xy$, ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, és $x + y \le 1$. Ha $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, és $x + y \ge 1$, akkor $H(x, y) = xy - \dfrac{1}{2}(x + y - 1)^2$.

5. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók, $g(x_1, \dots, x_n)$ n-változós (mérhető) függvény, $\eta = g(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Mutassuk meg a Fubini tétel segítségével, hogy $\eta, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}$ független valószínűségi változók.

Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0, x_1, \dots, x_m$ számokat. Definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u) = 1$, ha $u < x_j$, $h_j(u) = 0$, ha $u \ge x$, $1 \le j \le m$, függvényeket, valamint legyen $h_0(u_1, \dots, u_n) = 1$, ha $g(u_1, \dots, u_n) < x_0$, $h_0(u_1, \dots, u_n) = 0$, ha $g(u_1, \dots, u_n) \ge x_0$. Jelölje $F_j(\cdot)$ a ξ_j valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a Fubini tétel alapján

$$
\begin{aligned}
&P(\eta < x_0, \xi_{n+1} < x_{n+1}, \dots, \xi_{n+m} < x_{n+m}) \\
&\quad = \int h_0(u_1, \dots, u_n) h_1(u_{n+1}) \dots h_{n+m}(u_{n+m}) F_1(\,du_1) \dots F_{n+m}(\,du_{n+m}) \\
&\quad = \int h_0(u_1, \dots, u_n) F_1(\,du_1) \dots F_n(\,du_n) \\
&\qquad\quad \int h_1(u_{n+1}) F_{n+1}(\,du_{n+1}) \cdots \int h_m(u_{n+m}) F_{n+m}(\,du_{n+m}) \\
&\quad = P(\eta < x_0) P(\xi_{n+1} < x_{n+1}) \cdots P(\xi_{n+m} < x_{n+m}),
\end{aligned}
$$

ahonnan következik a feladat állítása.

6. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$-vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_n) = f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)$ függvény.

Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0, x_1, \dots, x_n$ számokat, és definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u) = 1$, ha $u < x_j$, $h_j(u) = 0$, ha $u \ge x$ $1 \le j \le n$, függvényeket.

Ekkor

$$\begin{aligned}
P(\xi_1 < x_1, \cdots, \xi_n < x_n) &= P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n) \\
&= \int h_1(u) f_1(u)\, du \cdots \int h_n(u) f_n(u)\, du \\
&= \int \cdots \int h_1(u_1) f_1(u_1) \cdots h_n(u_n) f_n(u_n)\, du_1 \dots du_n \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)\, du_1 \dots du_n
\end{aligned}$$

ahonnan következik a feladat állítása.

7. Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x) = \int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2} \le x - y \le \frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2} + x \le y \le \frac{1}{2} + x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi+\eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2} + x, \le \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x| > 1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x) =$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1 - x$, azaz ebben az esetben $g(x) = 1 - x$. Ha $-1 \le x \le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum amelynek hossza $1 + x = 1 - |x|$, azaz $g(x) = 1 + x = 1 - |x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $g(x) = 0$, ha $x > 1$.

Megadunk egy másik geometriai érvelésen alapuló megoldást is, amelyik a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A \subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi, \eta) \in A) = \lambda(A \cap K)$. Speciálisan, $G(x) = P(\xi + \eta < x) = \lambda(K \cap \{(u, v) \colon u + v < x\})$. Ha $x \le -1$, akkor $G(x) = 0$, ha $-1 \le x \le 0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right)$ és $\left(\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{2}\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac{1}{2}(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x \ge 1$, akkor $G(x) = 1$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, amelyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + x\right)$ és $\left(-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right)$

pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x) = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x) = 0$, ha $|x| \le 1$, $g(x) = 1 + x$, ha $-1 \le x \le 0$, és $g(x) = 1 - x$, ha $0 \le x \le 1$.

8. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x > 0$. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

   Általánosabban, legyenek $\xi_1, \dots \xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1 + \dots + \xi_m$ sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: Ki kell számolnunk az $f * f(x)$ illetve $\underbrace{f * \dots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x) = 0$, ha $x \le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y \le 0$ vagy $x - y \le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x \ge 0$ esetén lehet nulla, az $x \le 0$ esetben $f(y)f(x-y) > 0$ minden y-ra nulla, és $x \ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y) > 0$ integrandus csak $0 \le y \le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x) = f * f(x)$ $x < 0$-ra $f_2(x) = 0$, és

$$
\begin{aligned}
f_2(x) = f * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\
&= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

   Hasonlóan, ha $f_m(x) = \underbrace{f * \dots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1 + \cdots \xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x) = 0$ minden $m \ge 1$ számra, ha $x < 0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x) = \dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1} * f(x) = f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$
\begin{aligned}
f_{m-1} * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{m-1} \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\
&= \lambda^m e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

   Másrészt $f_m(x) = 0$, ha $x \le 0$.

9. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

   Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a $G(x) = P(\{\omega\colon \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\})$ eloszlásfüggvényt kell kiszámolni az $F(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében. Viszont, ha ismerjük egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, akkor az meghatározza a $P(\omega\colon \xi(\omega) \in B)$ halmazok valószínűségét minden „szép”, azaz Borel mérhető B halmazra. Vegyük észre, hogy jelen feladatban is ilyen jellegű problémát kell megoldani. Az ebben a feladatban megjelenő B halmaz egyszerű szerkezetű, és ezért ez a feladat könnyebben megoldható. Tekintsük az $A(\omega,x)=\{\omega\colon \xi(\omega)+\xi(\omega)^2<x\}$ halmazokat. Ezek valószínűségét kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük az $B(x)=\{y\colon y+y^2<x\}$ hamazt. Vegyük észre, hogy $B(x)=\{y\colon y_1(x)<y<y_2(x)\}$, ahol $y_1(x)=\dfrac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ és $y_2(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$ az $y^2+y=x$ egyenlet kisebb és nagyobb megoldása, és $A(\omega,x)=\{\omega\colon y_1(x)<\xi(\omega)<y_2(x)\}$. Innen $G(x)=P\left(\{\omega\colon y_1(x)<\xi(\omega)<y_2(x)\}\right)=F(y_2(x))-F(y_1(x))$. Ezért a $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x)=P\left(y_1(x)<\xi<y_2(x)\right)=P\left(\xi<y_2(x)\right)=1-e^{-y_2(x)}=1-\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x\ge 0$, és $G(x)=0$, ha $x\le 0$ függvény. A $\xi+\xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, azaz $g(x)=0$, ha $x<0$, és $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}\exp\left\{\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x\ge 0$.

Tekintsünk két a második előadáson tárgyalt feladatot, amelyet annak idején geometriai meggondolások alapján oldottunk meg. Megmutatjuk, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolució segítségével is.

10. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás: Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac12\le\xi_1-\xi_2\le\frac12$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u)=P(\xi_1-\xi_2<u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u)=f_1*f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u)=1$, ha $0\le u\le 1$, $f_1(u)=0$, különben, $f_2(u)=1$, ha $-1\le u\le 0$, $f_2(u)=0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac12\right)-F\left(-\frac12\right)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}g(u)\,du$ integrál. Továbbá,

$$g(x)=f_1*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(u)f_2(x-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)f(x-u)\,du,\quad -\infty<x<\infty,$$

ahol $f(u)=1$, ha $\frac12\le u\le\frac12$, $f(u)=0$, ha $u\ge\frac12$.

Az ötödik feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u)=1-u$, ha $0<u<1$ $g(u)=1+u$, ha $-1<u<0$. Innen $F\left(\frac12\right)-F\left(-\frac12\right)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}(1-|u|)\,du=\frac34$.

11. Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Negoldás: Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, amelyre $f(x) = 2$, ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Minket a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x) = f * f(x)$, ahonnan $g(x) = 2 - |2 - 4x|$, ha $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, amelyet a a következő képletek adnak meg: $F(u) = 0$, ha $u \leq 0$, $F(u) = 1 - 2u^2$, ha $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, $F(u) = 1 - 2(1-u)^2 = 4u - 2u^2 - 1$, ha $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$. Ha $u \geq 1$, akkor $F(u) = 1$.