A Valószínűségszámítás I. előadássorozat első előadása.
2003 február 4.

Összefoglaló: Néhány a véletlenről szóló megjegyzés után rátértem a valószínűségszámítás két legfontosabb eredményének a nagy számok törvényének és a centrális határeloszlástétel némileg informális ismertetésére. Néhány példával próbáltam megvilágítani, hogy milyen természetes problémák megoldásában nyújtanak ezek az eredmények nagy segítséget. Ezután néhány valószínűségi probléma tárgyalásához fogtam hozzá, majd a valószínűségi mező általános definicióját adtam meg. Célom volt megmutatni, hogy ez a formális definició segít bizonyos hasznos heurisztikus elvek pontos megfogalmazásában. Előbb azonban mutattam két példát, amelyek megmutatják, hogy milyen elméleti nehézségek leküzdésére volt szükség e fogalom megalkotásakor.

Tudjuk tapasztalatból, hogy évente körülbelül ugyanannyi fiú és lány születik. Ugyanakkor, az hogy az egyes újszülöttek fiúk lesznek-e vagy lányok a véletlentől függ. Természetes feltenni, hogy minden újszülött egymástól függetlenül lesz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fiú vagy lány. Az, hogy ilyen körülmények között minden évben körülbelül ugyanannyi fiú és lány születik, tehát nem az a helyzet, hogy egyik évben a születendő fiúk a másik évben a születendő lányok száma sokkal nagyobb, a valószínűségszámítás egy nagyon fontos eredményének a *nagy számok törvényének* a következménye. Ez a törvény azt fejezi ki, hogy ha sok egymástól független kisérletet végzünk, amelyek eredménye valamely véletlen szám, akkor a mért eredmények átlaga nagyon kevéssé ingadozik a kisérletek eredményének várható értéke körül. Ezt az állítást később fogjuk pontosabban megfogalmazni.

Szeretnénk pontosabb eredményeket kapni arról, hogy mekkora ez az ingadozás. Ilyen eredményt ír le az úgynevezett *centrális határeloszlástétel.* A probléma megértése érdekében tekintsük a következő problémát. Valaki a következő játékot ajánlja fel nekünk. Feldob egy (szerinte) szabályos pénzdarabot 10 000 alkalommal. Fejdobás esetén mi fizetünk neki 1 forintot, írásdobás esetén ő fizet nekünk 1 forintot. Elhisszük-e, hogy a pénzdarab valóban szabályos volt, ha mind a 10 000 dobás fej volt? És akkor, ha 9000 fej és 1000 fej dobás történik? Ha 6000 fej és 4000 írásdobás? Ha 5200 fej és 4800 írásdobás? Ha 5050 fej és 4950 írásdobás?

Természetesen elvileg előfordulhat, hogy egy szabályos pénzdarab, amelyet feldobunk 10 000 alkalommal minden egyes esetben a fej oldalra esik. De ennek a valószínűsége rendkívül kicsi, $2^{-10\ 000}$. Nagyon hihetetlennek tűnhet, hogy egy ilyen esemény valóban bekövetkezik. Ugyancsak rendkívül kicsi annak a valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint 9000. A nagy számok törvénye szerint nagy x számra annak valószínűsége, hogy a fej-dobások száma nagyobb mint $5000 + x$ rendkívül kicsi nagy x számok esetén. De felmerül a kérdés, mely x számok tekinthetők nagynak. Ahhoz, hogy ezt a kérdést meg tudjuk válaszoni, jó lenne ismerni egy olyan eredményt, amelyik közelítőleg megadja annak a valószínűségét, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $5000 + x$ egy szabályos pénzdobás feldobása esetén. Ilyen eredmény ismeretes, és ezt nevezik a centrális határeloszlástételnek.

Érdemes megjegyezni, hogy ilyen jellegű kérdések máskor is természetes módon felmerülnek. Például a 2000. évi amerikai elnökválasztáson nagyon szoros volt a Florida államban megadott eredmény. A különböző időpontokban megadott eredmények szerint egyszer mondtak olyan szoros eredményt is, amely szerint a leadott 5 000 000 szavazatból a két jelöltre leadott szavazatok különbsége mindössze 300 volt. Felmerül a kérdés: Ha feltesszük, hogy az egyes szavazók egymástól függetlenül szavaztak, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választották valamelyik jelöltet, akkor egy ilyen rendkívül szoros választási eredmény rendkívülinek tekinthető vagy viszonylag nagy a valószínűsége annak, hogy a szavazatok különbsége ilyen feltételek mellett kisebb mint 300. A centrális határeloszlástétel segítséget nyújt e kérdés megválaszolásában, és e szerint az eredmény szerint egy ilyen esemény valószínűsége körülbelül 0.1. Ezt a feladatot később tárgyalni fogjuk.

Érdemes megjegyezni, hogy a centrális határeloszlástétel más fontos problémákban is megjelenik. Tegyük fel, hogy 100 lámpa összélettartamára vagyunk kiváncsiak. Olyan lámpákat használunk, amelyek mindegyikének várható élettartama 100 óra, de valódi élettartamuk véletlen valamilyen ingadozással. Ha egy lámpa kiég, akkor kicseréljük a következő lámpára, amelynek várható élettartama szintén 100 óra, de valódi élettartama ekörül a várható érték körül ingadozik. Az összes lámpa együttes élettartama ekkor 10 00 óra plusz valamilyen véletlen ingadozás. A centrális határeloszlástétel ennek az ingadozásnak az eloszlásáról nagyon érdekes eredményt mond ki. Ennek az eloszlásnak jellegzetes alakja van, amelyik bizonyos értelemben nem függ a lámpák élettartalmának viselkedésétől. Ez magyarázza meg azt is, hogy miért jelenik meg teljesen különböző problémákban egy jellegzetes haranggörbének nevezett görbe. Ennek pontosabb magyarázatát később, a centrális határeloszlástétel tárgyalása során fogjuk megadni.

A valószínűségszámítás vizsgálatában egy másik nagyon fontos hatás volt különböző szerencsejátékok vizsgálata. Ezek alaposabb vizsgálata nagyon hasznos volt, több értékes gondolat hátterében a szerencsejátékok vizsgálata van. Érdemes megjegyezni, hogy az első ilyen híres probléma De Méré lovagtól származik, aki Pascaltól kérdezte meg két szerencsejátékkal kapcsolatos kérdését. Ezek egyikét de Méré lovag is meg tudta oldani, de a másikat nem. Pascal megoldotta ezt a feladatot, illetve megírta a Toulouseban élő Fermatnak. Fermat is megoldotta ezt a problémát. Fermat megoldási módszere különbözött, de ugyanazt az eredményt kapta. Ezután írta Pascal sokat idézett mondatát: Ugyanaz az igazság Párizsban és Toulouseban. Leírom de Méré lovag kérdéseit, de e feladatok megpldását a gyakorlaton fogják megtenni.

De Méré lovag problémája:

a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$-nél kicsit kisebb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsit nagyobb.)

b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, amelynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Mégis a ma tárgyalt modern valószínűségszámítás megalkotása jóval később történt. Ez Andrei Nikolaevich Kolmogorov nevéhez fűződik, aki az 1930-as években írt Grundbegriffe der Wahrsheinlichkeitstheorie (A valószínűségszámítás alapjai) című művében adta meg a valószínűségszámítás ma használt modelljét, és bizonyított be néhány alapvető eredményt, amelyek lehetővé tették e modell használatát. Két természetes kívánalom van a valószínűségszámítás jó modelljével szemben.

(i) Elvárjuk, hogy minden természetes véletlennel kapcsolatos feladat tárgyalható legyen ebben a modellben.

(ii) Elvárjuk, hogy azok a hasznos gondolatok, érvek, amelyek lehetővé teszik konkrét feladatok megoldását, alkalmazható legyen a vizsgált modellben.

Kolmogorov modellje mind a két kívánalmat kielégíti. Mielőtt azonban ennek ismertetésére térnénk tekintsünk néhány egyszerű feladatot, amelyek vizsgálata természetessé teheti ezen fogalom bevezetését.

1. Egy pénzdarabot feldobunk kétszer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás lesz?

   Megoldás: A dobások lehetséges kimenete, (F,F), (F,I), (I,F) és (I,I). Ezen lehetséges kimenetelek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás, azaz az (F,I) vagy (I,F) dobássorozat következik be $\frac{1}{2}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás, azaz az (F,F), (F,I) vagy (I,F) dobássorozatok eredménye következik be, $\frac{3}{4}$.

2. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?

   Megoldás: A dobások összegének eredménye akkor 9, ha a $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ vagy $(6,3)$ dobáspárok valamelyike következik be. Ezen dobássorozatok mindegyikének valószínűsége $\dfrac{1}{36}$, ezért $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az összeg pontosan 9. Hasonlóan, az összeg akkor 10, ha a $(4,6)$, $(5,5)$ vagy $(6,4)$ dobáspárok valamelyike jelenik meg, és ennek a valószínűsége $\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$. Jegyezzük meg, hogy a fenti tárgyalásban az egyes kimenetelek felsorolásában nemcsak azt vettük figyelembe, hogy milyen dobáseredmények jelentek meg, hanem azt is, hogy melyik kockán jelentek meg ezek a dobáseredmények. Miért?

3. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros. Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvet tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdemes ezeket az érveléseket mégegyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definicióját.

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül.* Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a 16. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye fehér, a második húzás eredménye piros. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$.

   Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, amelyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, erért ezek a valószínűségek megegyeznek.

Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy egy előírt konkrét 25 hosszúságú sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, akkor ennek valószínűsége $P(k) = \dfrac{25\cdot 24\cdots(25-k+1)\cdot 30\cdot 29\cdots(30-(25-k)+1)}{50\cdot 49\cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25}\dfrac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával.

Jelölje $A(k;5,16)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, és az 5. helyen piros a 16. helyen pedig fehér jel áll. Jelölje továbbá $A(k;1,2)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, amelyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, az 1. helyen piros a 2. helyen pedig fehér jel áll. Ekkor a két összehasonlítandó valószínűség $\sum\limits_k A(k;5,16)P(k)$ illetve $\sum\limits_k A(k;1,2)P(k)$. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk a kívánt azonosság teljesülését elegendő belátni azt, hogy $A(k;5,16)=A(k;1,2)$ minden k számra.

Viszont nem nehéz belátni, hogy $A(k;5,16)=A(k;1,2)=\binom{23}{k-1}$, mert mind a két esetben 23 előírt helyre kell írni $k-1$ piros és $25-(k+1)$ fehér golyót.

Az utolsó azonosság egy másik lehetséges bizonyítása: Mutassuk meg, hogy ha tekintjük az összes 25 hosszúságú k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmazó sorozatot, akkor az ilyen sorazatok 5. jelét kicserélve az elsővel és a 16. jelét a másodikkal kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk azon halmazok között, amelyek számosságaként definiáltuk az $A(k;5,16)$ és $A(k;1,2)$ számokat.

Hasonlóan mutatható meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első, illetve hogy az ötödik húzás piros megegyezik.

Az előző példák, illetve azok megoldásai mutatják, hogy érdemes a valószínűségi feladatok halmazelméleti modelljét tekinteni, és azokat jobban megérteni. A formális definició megadása előtt tekintsünk néhány problémát, ahol természetes heurisztikus elképzeléseink vannak. Látni fogjuk, hogy ezek az elképzelések helyesek, de azok bizonyítása, felhasználása szükségessé teszi bizonyos mély elméleti eredmények kidolgozását.

Első példa: Ledobunk a $[0,1]$ egységintervallumra egymástól függetlenül először egy x majd egy y pontot, azaz annak valószínűsége, hogy az x vagy y pont az egységintervallum valamely $[a,b]\subset[0,1]$ részintervallumába esik megegyezik ezen intervallum $|b-a|$ hosszával, annak valószínűsége pedig, hogy az egységnégyzet belsejében lévő az (x,y) pontpár által meghatározott pont egy az egységnégyzetben levő $[a,b]\times[c,d]\subset[0,1]\times[0,1]$ téglalapba esik megegyezik ennek a téglalapnak $(b-a)(c-d)$ területével. Azt várjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az (x,y) pont egy az egységnégyzet belsejében lévő r sugarú körbe esik megegyezik ennek a körnek $r^2\pi$ területével. Általánosabban, azt várjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az (x,y) pont egy az egységnégyzet belsejében lévő A halmazba esik egyenlő ennek a halmaznak a területével.

Helyes-e ez a természetes elképzelés? Alapjában véve helyes, de felmerül egy komoly elvi probléma. Nevezetes a következő: Annak az állításnak, hogy a véletlen (x,y) pont akkora valószínűséggel esik egy A halmazba, mint amennyi ennek az A halmaznak a területe csak akkor van értelme, ha beszélhetünk az A halmaz területéről. Tudjuk-e értelmezni tetszőleges halmaz területét? Gondoljuk meg, hogy már egy kör területének a meghatározása sem egyszerű. Általánosabban, a kérdéskör (bizonyos mély elméleti eredmények felhasználásával) megmutatható, hogy komoly elvi okok miatt nem tudjuk minden halmaz területét definiálni. De azoknak a halmazoknak, amelyek konkrét feladatokban megjelennek mindig definiálható a területük. Annak tisztázása viszont, hogy ez valóban így van komoly elméleti eredmények bizonyítását és felhasználását igényli. Ennek alaposabb vizsgálata nem ennek az előadásnak a témája.

Második példa: Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor egymás után egymástól függetlenül. Jelölje $k(n)$ a fejdobások számát az első n dobásban. Azt várjuk, hogy a $\frac{k(n)}{n}$ számoknak van $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}$ határértékük, és az a $\frac12$ valószínűséggel egyezik meg. Látni fogjuk, hogy ez az állítás igaz. Ezt az állítást hívják a nagy számok erős törvényének (ebben a speciális esetben). De ahhoz, hogy ezt az állítást bebizonyítsuk először azt kell tisztáznunk, hogy a megfogalmazott állításnak van értelme. Mint látni fogjuk, nem minden lehetséges eseménynek definiáljuk a valószínűségét. Meg kell mutatnunk, hogy annak az eseménynek, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}$ határérték valóban létezik, és ez a határérték valóban $\frac12$ valóban van valószínűsége. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük, először meg kell fogalmaznunk a valószínűségszámítás pontos elméletét, és meg kell ismernünk annak néhány alapvető fogalmát.

A valószínűségszámítás Kolmogorov féle modellje.

Valószínűségi mező definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ rendszer valószínűségi mező, ha Ω, amelyet biztos eseménynek is nevezünk, bizonyos általában ω-val jelölt elemekből (pontokból) áll, amelyeket elemi eseményeknek is neveznek. Ezenkívül kijelöltük az Ω halmaz bizonyos kitüntetett részhalmazait, amelyek úgynevezett σ-algebrát alkotnak, és amelyet $\mathcal{A}$-val jelöltünk. Azon halmazoknak (eseményeknek), amelyek a $\mathcal{A}$ σ-algebra elemei van valószínűségük, és ezek a valószínűségek nem-negatív egyre normált σ-additív halmazfüggvényt, úgynevezett valószínűségi mértéket alkotnak.*

Annak érdekében, hogy a fenti definiciót teljessé tegyük, tisztáznunk kell a σ-algebra illetve a nem-negatív egyre normált σ-additív halmazfüggvény fogalmát. Azután meg kell beszéni, hogy például a korábban tárgyalt feladatokat hogyan tárgyalhatjuk ennek a modellnek a segítségével.

Algebra és σ-algebra definiciója. *Legyen adva egy Ω halmaz, és azoknak bizonyos $A\subset\Omega$ részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ algebra, ha tetszőleges $A\in\mathcal{A}$ halmazra ennek komplementere, az $\Omega\setminus A$ halmaz is eleme a $\mathcal{A}$ halmazrendszernek, azaz*

$\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$, és az $\emptyset$ üres halmaz is eleme az $\mathcal{A}$ algebrának, azaz $\emptyset \in \mathcal{A}$. Továbbá, ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ elemei az $\mathcal{A}$ halmazrendszernek, akkor e halmazok metszete illetve uniója is teljesíti az $A \cap B \in \mathcal{A}$ és $A \cup B \in \mathcal{A}$ feltételeket.

Az $\mathcal{A}$ algebra akkor σ-algebra, ha ezen kívül teljesíti a következő feltételeket is: Ha $A_1, A_2, \dots,$ megszámlálható sok halmaz, amelyek az $\mathcal{A}$ algebra elemei, azaz $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor ezek metszete és uniója is benne van az $\mathcal{A}$ (σ)-algebrában, azaz $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, és $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Additív és σ-additív halmazfüggvény definiciója. *Legyen adva egy Ω halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebra. Azt mondjuk, hogy egy $\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvény additív, ha bármely diszjunkt $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Azt mondjuk, hogy ez a μ halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ-additív is, ha minden diszjunkt $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots,$ halmazokra $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Ez a σ-additív halmazfüggvény nem-negatív, ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A) \ge 0$, és egyre normált, ha $\mu(\Omega) = 1$.*

Megjegyzés: A jelölésrendszer az irodalomban nem egyértelmű. Van ahol két A és B halmaz unióját és metszetét $A \cup B$ illetve $A \cap B$-vel és van ahol $A + B$ illetve AB-vel jelölik. Hasonlóan megszámlálható sok halmaz unióját illetve metszetét szokás bizonyos helyeken $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, illetve a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jelöléssel, másutt pedig a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ illetve $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jelöléssel megadni. Végül két halmaz különbségét szokás bizonyos helyeken $A \setminus B$-vel másutt $A - B$-vel jelölni.

Lássunk néhány példát arra, hogyan tudunk valószínűségi problámát a valószínűségi mező Kolmogorov féle definiciója alapján megfogalmazni.

a.) Adjuk meg egy szabályos pénz tíz egymásutáni (független) dobás eredményeinek egy modelljét.

A természetes hozzáállás a következő: Vegyük az összes lehetséges 10 hosszúságú fej-írás sorozatot. Ezek lesznek az $\omega) = (F, \dots, I, \dots)$ elemi események. Az Ω biztos esemény az összes lehetsége előbb definiált ω elemi eseményekből álló halmaz. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra az Ω összes lehetséges részhalmazából áll.) Ilyen módon valóban σ-algebrát definiáltunk. Definiálnunk kell még a $P(A)$ valószínűségeket minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Ezt a következőképp tesszük: Minden ω elemi eseményre $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, mert egy szabályos pénzdarab feldobásakor minden dobássorozatnak ennyi a valószínűsége. Végül $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra.

Egy pénzdarabot, mely $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az írás oldalára feldobunk (egymástól függetlenül) 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

Megoldás: Legyen ω egy elemi esemény egy 10 hosszúságú fej-írás sorozat. Tekintsük az összes ilyen sorozatból álló halmazt, ez legyen Ω, a biztos esemény. Legyenek a $\mathcal{A}$ σ-algebra elemei az Ω halmaz részhalmazai. (Az összes lehetséges részhalmazt tekintjük.) Definiálnunk kell még egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz (esemény) valószínűségét $P(A)$ is. Ezt a következő módon tesszük: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, és $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$, ha az ω elemi esemény olyan sorozat, amelyik k fej és $10-k$ írásjelből áll. (Ugyanis minden fej-dobás esetén $\frac{1}{3}$ és minden írás-dobás esetén $\frac{2}{3}$-dal, a fej, illetve írásdobás valószínűségével kell megszorozni a valószínűséget.)

Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót

a.) visszatevéssel,

b.) visszatevés nélkül.

Adjunk erre valószínűségi modellt mind a két esetben.

Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonló konstrukciót adhatunk. Legyenek az ω elemi események a 25 hosszúságú P, F (piros, fehér) jelekből álló sorozatok, az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazaiból álló halmaz, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, és definiálnunk kell még a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Eddig a pontig az a.) és b.) esetet kielégítő konstrukció nem különbözött. A különbség az lesz, hogy a két esetben másképp fogjuk definiálni a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Az a.) esetben, amikor visszatevéssel húzzuk ki a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{25-k}$, mert minden piros húzásnak $\frac{20}{50}$ és minden fehér húzásnak $\frac{30}{50}$ a valószínűsége, (a húzás előtt az urnában levő piros illetve fehér golyók száma osztva az urnában levő golyók számával.) A b.) eseben, amikor visszatevés nélkül húzzuk a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\dfrac{25 \cdot 24 \cdots (25-k+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(25-k)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \dfrac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával, ha k fehér és $25-k$ piros húzás történt.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.