A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tízenkettedik előadása.

2003. április 29.

Felidézem a centrális határeloszlástétel bizonyításában megjelenő és az előző előadásban tárgyalt legérdekesebb eredményeket és fogalmakat. A bizonyítás viszonylag fárasztó technikai részleteit elhagyom, viszont a felidézendő fogalmak és eredmények önmagukban is érdekesek.

Az előző előadásban ismertettem az eloszlásban való konvergencia definicióját. A határeloszlástételek bizonyításában viszont e definició helyett inkább az alábbi a múlt előadáson ismertetett eredményt érdemes használni.

Tétel. *$F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty} \int g(u)\, dF_n(u) = \int g(u)\, dF(u) \tag{a}$$

azonosság.

Természetes módon felmerülhet az a kérdés, hogy nem elég-e a határeloszlástételek bizonyításában az előbb idézett tételben szereplő (a) tulajdonságot egy könnyebben ellenőrizhető tulajdonsággal helyettesíteni, nevezetesen a folytonos és korlátos függvények családjának csak egy kisebb és jobban kezelhető részének az integrálját vizsgálni. Erre a kérdésre igenlő választ lehet adni. A válasz pontosabb megfogalmazása érdekében bevezettük az úgynevezett karakterisztikus függvényeket, (amelyek a t paramétertől függő) $e_t(x) = e^{itx}$ függvények integráljai az x változóban a tekintett valószímüségi változó eloszlásfüggvénye szerint. Felidézek továbbá néhány eredményt, amelyek megmagyarázzák, hogy miért érdemes a karakterisztikus függvényekkel dolgozni.

Valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a definiciója. *Legyen ξ valószínűségi változó valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u) = P(\xi < u)$, $-\infty < u < \infty$, a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(\,du), \quad -\infty < t < \infty,$$

függvény. Adva egy F eloszlásfüggvény az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét is definiálni fogjuk mint egy F eloszlású ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével ki lehet számolni, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)

A következő egyszerű állításokat azok fontossága miatt külön Lemma formájában fogalmaztam meg.

Lemma valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről. *Legyenek* $\xi_1,\dots,\xi_n$ *független valószínűségi változók, jelölje* $S_n=\sum\limits_{j=1}^n \xi_j$ *e valószínűségi változók összegét és* $\varphi_j(t)$*,* $1\le j\le n$*, a* ξ_j *valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az* S_n *összeg karakterisztikus függvénye a* $\psi_n(t)=Ee^{itS_n}=\prod\limits_{j=1}^n\varphi_j(t)$*,* $-\infty<t<\infty$ *függvény. Ha* A *és* $B\neq 0$ *valós számok, akkor a* $\dfrac{S_n-A}{B}$ *valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az*

$$Ee^{it(S_n-A)/B}=e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac tB\right)=e^{-itA/B}\prod_{j=1}^n\varphi_j\left(\frac tB\right)$$

függvény.

Legyen ξ *olyan valószínűségi változó* $F(\cdot)$ *eloszlásfüggvénnyel, amelyre teljesül az* $E|\xi|^k=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|u|^kF(\,du)<\infty$ *egyenlőtlenség valamilyen* k *pozitív egész számra. Ekkor a* ξ *valószínűségi változó* $\varphi(t)$ *karakterisztikus függvényének a deriváltjai megadhatók a* $\dfrac{d^j}{dt^j}\varphi(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}i^ju^je^{itu}F(\,du)$ *képlettel minden* $0\le j\le k$ *és* $-\infty<t<\infty$ *számra. Speciálisan,* $t=0$ *választással* $\left.\dfrac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0}=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}i^ju^jF(\,du)=i^jE\xi^j$ *minden* $0\le j\le k$ *számra.*

Megjegyzés: Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_1=0$, és vezessük be a $\sigma_2=\operatorname{Var}\xi_1$, valamint az $Ee^{it\xi_1}=\varphi(t)$, $-\infty<t<\infty$ ($\varphi(t)$ a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus függvénye) jelöléseket. Legyen továbbá $S_n=\sum\limits_{k=1}\xi_k$ és $\bar S_n=\dfrac{S_n}{\sqrt n\sigma}$ az S_n valószínűségi változó normalizáltja. Ekkor $Ee^{itS_n}=\varphi(t)^n$, $Ee^{it\bar S_n}=\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt n\sigma}\right)^n$, és $\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt n\sigma}\right)\sim 1-\dfrac{t^2}{2n\sigma^2}$. Ez a formula lehetővé teszi, hogy viszonylag jó becslést adjunk a $\bar S_n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényére. Azt kívánjuk vizsgálni, lehetővé teszi-e ez a formula egy jó határeloszlástétel bizonyítását független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjának az összegére.

Abból, hogy bízonyos F_n eloszlások $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényeinek a sorozata konvergál egy F eloszlásfüggvény $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényéhez minden $-\infty<t<\infty$ számra, akkor $\int\left(\sum c_ke^{itx}\right)F_n(\,dx)\to\int\left(\sum c_ke^{itx}\right)F(\,dx)$ minden ilyen tipusú függvényre. Kérdés az, hogy elegendőek-e ezen reláció igazolása annak bizonyításához, hogy az F_n és F eloszlásfüggvények teljesítik az (a) tulajdonságot, azaz az F_n eloszlsók eloszlásban konyvergálnak az F eloszláshoz. E kérdésre igenlő választ lehet adni, de ennek megmutatása érdekében olyan eredményekre van szükségünk, amelyek azt mondják ki, hogy a trigonometrikus függvények lineáris kombinációi a folytonos függvények elég gazdag családját alkotják. Ilyen jellegű, és számunkra a továbbiakban nagyon hasznos eredmény az alább megfogalmazott Weierstrass második approximációs tétele.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(t)$ függvényre és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $P_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ trigonometrikus polinom, amelyre*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

Ez az eredmény a trigonometrikus függvényeknek a kívánt jellegű tulajdonságát fejezi ki, de csak periódikus folytonos függvényeket tudunk ilyen módon approximálni trigonometrikus polinomokkal. Vegyük észre, hogy a $(-\pi, \pi]$ intervallumban értelmezett és a számegyenesre 2π periódissal kiterjesztett folytonos függvényeket az $\varepsilon_n(t) = e^{int}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, polinomjaival tudjuk tetszőleges pontossággal közelíteni. Ezt az eredményt felhasználva és átskálázva kapjuk, hogy tetszőleges az eredetileg $(-T, T]$ intervallumban értelmezett és $2T$ szerint periódikusan kiterjesztett folytonos függvények a szuprémum normában tetszőleges pontossággal meg lehet közelíteni az $e_n(t) = e^{int/2\pi T}$ alakú függvények líneáris kombinációval. Ebből következik, hogy ha az F_n eloszlások $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényei konvergálnak minden pontban egy F eloszlás $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényéhez, akkor $\int g(x)F_n(\,dx) \to \int g(x)F(\,dx)$ minden folytonos és periódikus függvényre. Kérdés, hogy elegendő-e ez az (a) reláció biztosításához?

Ahhoz, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából következtetni tudjunk magunknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciájára tudnunk kell, hogy a karakterisztikus függvények meghatározzák az eloszlásfüggvényeket. Ezt az áll1tást fogalmazza meg az alábbi eredmény, amelyet Weierstrass második approximációs tétele segítségével be lehet bizonyítani. (Ennek bizonyítását leírtam az előző előadás anyagában.)

Tétel. *Legyen $F(\cdot)$ és $G(\cdot)$ két eloszlásfüggvéy, amelyek karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor $F(x) = G(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Szeretnénk olyan minél erősebb eredményt bizonyítani, amelyik szerint a karakterisztikus függvények konvergenciájából és esetleg néhány további általános feltételek esetén érvényes és könnyen ellenőrizhető tulajdonság teljesüléséből következik az eloszlások konvergenciája. Felmerül a kérdés, hogy csak a karakterisztikus függvények konvergenciájából következik-e az eloszlások konvergenciája? Jegyezzük meg először, hogy amennyiben eloszlások F_n sorozata konvergál egy eloszláshoz, akkor ezen eloszlások $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényei konvergálnak egy függvényhez, (a határeloszlás karakterisztikus függvényéhez). Azt kérdezzük, hogy amennyiben tudjuk, hogy eloszlások karakterisztikus függvényei konvergálnak egy függvényhez, de semmi plusz informácionk sincsen, akkor ez elegendő-e ahhoz, hogy ebből az eloszlások konvergenciájára következtessünk. E probléma megértése érdekében tekintsük először az alábbi példát:

Példa karakterisztikus függvények konvergenciájára: Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2 \dots$, a $[-n, n]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz legyen $F_n(\cdot)$

sűrűségfüggvénye az $f_n(u) = \dfrac{1}{2n}$, ha $-n \le u \le n$, $f_n(u) = 0$, ha $|u| > n$ képlet segítségével megadott függvény. Ekkor az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak az $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 0$, ha $t \ne 0$ képlettel megadott $\varphi(t)$ függvényhez, amelyik az origóban nem folytonos. Továbbá az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban, mert minden véges $[a, b]$ intervallumra $\lim\limits_{n\to\infty} F_n([a, b]) = 0$.

Valóban, az F_n függvény karakterisztikus függvénye a fenti példában $\varphi_n(t) = \displaystyle\int_{-n}^{n} \frac{1}{2n} e^{itu}\, du = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{i2nt} = \frac{\sin tn}{tn}$, ha $t \ne 0$, és $\varphi_n(0) = 1$. Innen látható, hogy $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t) = 0$, ha $t \ne 0$, és $\varphi(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(0 = 1)$ határérték létezik. Másrészt az F_n eloszlásfüggvények nem konvergálnak egy eloszlásfüggvényhez. Nem nehéz látni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{2}$ minden x számra, azaz a határérték létezik, de az nem eloszlásfüggvény.

A fenti példában az eloszlások nem konvergálnak, bár karakterisztikus függvényeik konvergálnak. Viszont azt is tudjuk, hogy amennyiben az eloszlásfüggvények sorozata egy eloszlásfüggvényhez konvergál, akkor ezek karakterisztikus függvényeinek sorozata a határeloszlás karakterisztikus függvényéhez konvergál, amelyik folytonos minden pontban. A legfontosabb az, hogy a karakterisztikus függvények egy az origóban is folytonos függvényhez konvergáljanak. A valószínűségszámítás egyik alapvető és az előző előadásban is megfogalmaozott eredménye azt mondja ki, hogy ez már elegendő az eloszlások konvergenciájához. Megismétlem ennek az eredménynek a megfogalmazását.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden $-\infty < t < \infty$ számra, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény, amelynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, amely egy $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, jelöli az $F_n(u)$, $\varphi_0(t)$ pedig az $F_0(u)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Ugyancsak megismétlem ennek az eredménynek a múlt előadáson megfogalmazott egyszerűsített és számunkra hasznos változatát.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel gyengített változata. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$, és $F_0(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvény $\varphi_0(t) = \int e^{itu} F_0(\,du)$ karakterisztikus függvénnyel. Az F_n eloszlásfüggvények akkor* *és csak akkor konvergálnak eloszlásban az F_0 eloszláshoz, ha a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények konvergálnak a $\varphi_0(t)$ karakterisztikus függvényhez minden $-\infty < t < \infty$ számra.*

Megmutatjuk, hogyan következik a centrális határeloszlástétel független egyforma eloszlású $\xi_1, \xi_2, \dots,$ valószínűségi változók normalizált összegeire.

Emlékezzünk arra, hogy a múlt előadáson megmutattuk, hogy a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye a $\varphi_0(t) = e^{-t^2/2}$ függvény. Továbbá, mint azt megtárgyaltuk egy megjegyzésben, ha $\xi_1 - E\xi_1$ karakterisztikus függvénye a $\varphi(t)$ függvény, $E\xi_1 = m$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \sigma^2$, akkor $\dfrac{\xi_1 - E\xi_1}{\sigma}$ karakterisztikus függvénye $\varphi\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)$, az $\dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ karakterisztikus függvénye $\psi_n(t) = \varphi^n\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$. Továbbá a $\varphi(t)$ függvény karakterisztikus függvényének Taylor-sorfejtése azt adja, hogy $\varphi\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \dfrac{t^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. (Azt használjuk fel, hogy $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = E(\xi - E\xi) = 0$, $\varphi''(0) = -E(\xi - E\xi)^2 = -\sigma^2$). Innen $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{t^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-t^2/2}$. Ez azt jelenti, hogy a független egyforma eloszlású valószínűségi változók normálizált összegeinek a karakterisztikus függvényei konvergálnak a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez. Innen következik a centrális határeloszlástétel.

A nagy számok erős törvénye.

Tárgyaltuk a nagy számok gyenge törvényét, amely szerint ha tekintjük $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, $j = 1, \dots, n$, összegét és $\dfrac{S_n}{n}$ átlagát, akkor az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan konvergálnak egy determinisztikus számhoz, amely a ξ_1 valószínűségi változó $E\xi_1$ várható értéke. Beláttuk, (a Csebisev egyenlőtlenség segítségével), hogy a nagy számok gyenge törvénye érvényes akkor, ha a ξ_1 valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete. Valójában ez a feltétel lényegesen gyengíthető. Ezenkívül, független valószínűségi változók átlagai nagyon általános feltételek mellett nemcsak sztochasztikusan, hanem egy valószínűséggel is konvergálnak a ξ_1 valószínűségi változó $E\xi_1$ várható értékéhez. Ezt az eredményt nevezik a nagy számok erős törvényének. Megfogalmazom az említett eredményeket és fogalmakat pontosan, és tárgyalni fogom ezen eredmények egymással való kapcsolatát. Sok fontos és tanulságos eredményt csk kimondok, de időhiány miatt a bizonyítását elhagyom.

Először felírom a (részben már korábban ismertetett) különböző konvergenciafogalmakat.

Az egy valószínűségű konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots,$ sorozata akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn* *vannak definiálva, másrészt)*

$$P\left(\omega\colon \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

Megjegyzés: Az egy valószínűségi konvergenciát a valószínűségszámításban és mértékelméletben majdnem mindenütt való konvergenciának is hívják.

A sztochasztikus konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál sztochasztikusan egy ξ valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt) minden $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Az eloszlásban való konvergencia definiciója: *Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez vagy az ezen eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz, ha* $\lim\limits_{n\to\infty} P(\xi_n < u) = F(u)$ minden olyan u számra, ahol az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény függvény folytonos. *(Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy ξ valószínűségi változóhoz, ha ez a sorozat eloszlásban konvergál az $F(u) = P(\xi < u)$ eloszlásfüggvényhez.)*

A továbbiakban tárgyalni fogjuk (részben kitűzött feladatok formájában) a különböző konvegenciafogalmak közötti kapcsolatot.

Igaz a következő kapcsolat: Egy valószínűségi konvergencia $\Rightarrow$ Sztochasztikus konvergencia $\Rightarrow$ Eloszlásban való konvergencia.

Tárgyaljuk először az egy valószínűségi és sztochasztikus konvergencia kapcsolatát.

Ha $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ egy valószínűséggel, akkor definiálva az

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \left\{\omega\colon \sup_{k\ge n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\right\}$$

halmazokat azt kapjuk, hogy az egymásba skatulyázott A_n halmazokra, (azaz $A_1(\omega) \subset A_2 \subset \cdots$), teljesül a $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ reláció. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Mivel érvényes a $\{\omega\colon |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} \supset A_n$ reláció, ezért $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon) \to 1$, azaz $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \ge \varepsilon) \to 0$, ha $n \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Nem kötelező házifeladat:

Valószínűségi változók ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup\limits_{k\ge n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n}|\xi_k-\xi|>\varepsilon\right)=0$.

Lássunk példát arra, hogy lehetséges olyan ξ_n, $n=1,2,\dots$, és ξ valószínűségi változókat konstruálni, amelyekre a ξ_n, $n=1,2,\dots$, sorozat sztochasztikusan tart ξ-hez, de a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Tekintsük a következő $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt: Ω a $[0,1]$ intervallum, $\mathcal{A}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája a $[0,1]$ intervallumon, a P valószínűségi mérték a Lebesgue mérték. Legyen

$$\xi_n(x)=\begin{cases}1 & \text{ha } x\in\left[(n-2^k)2^{-k},(n+1-2^k)2^{-k}\right]\\ 0 & \text{ha } x\notin\left[(n-2^k)2^{-k},(n+1-2^k)2^{-k}\right]\end{cases}$$
$$\text{akkor ha } 2^k\le n<2^{k+1},\quad k=1,2,\dots,$$

és $\xi(x)=0$ minden $0\le x\le 1$ számra. Ekkor $P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=2^{-k}$ minden $\varepsilon>0$ számra, ha $2^k\le n<2^{k+1}$. Tehát a ξ_n, $n=1,2,\dots$, sorozat sztochasztikusan konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Viszont mivel $\limsup\limits_{n\to\infty}\xi_n(x)=1$ minden $0\le x\le 1$ számra, ezért a ξ_n sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a ξ valószínűségi változóhoz.

Másrészt a Borel-Cantelli lemmából következik, hogy amennyiben minden $\varepsilon>0$ számra $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)<\infty$, akkor a ξ_n sorozat egy valószínűséggel konvergál a ξ valószínűségi változóhoz. Miért?

A sztochasztikus konvergencia és eloszlában való konvergencia közötti kapcsolatra érvényesek a következő nem kötelező házi feladatok formájában megfogalmazott állítások.

Nem kötelező házifeladat:

a.) Ha ξ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban is konvergálnak ehhez a ξ valószínűségi változóhoz.

b.) Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz. Például, ha ξ_n, $n=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek nem elfajultak, azaz nincs olyan konstans amelyeket ezek a valószínűségi változók egy valószínűséggel vesznek fel, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a ξ_1 valószínűségi változóhoz, viszont nem konvergálnak sztochasztikusan.

c.) Viszont igaz a következő állítás: Ha ξ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy a konstanshoz, (azaz egy olyan valószínűségi változóhoz, amely egy valószínűséggel az a konstanst veszi fel, akkor a ξ_n, $n=1,2,\dots$, sorozat sztochasztikusan is konvergál ehhez az a konstanshoz.

Most rátérünk annak tárgyalására, hogyan lehet a nagy számok gyenge törvényének a Csebisev egyenlőtlenségen alapuló bizonyítását finomítva a nagy számok erős törvényét is bebizonyítani alkalmas feltételek mellett. Az alább ismertetendő érvelésben valójában a tétel bizonyítása érdekében a szükségesnél sokkal erősebb kikötéseket teszünk. Idézzük fel a Csebisev egyenlőtlenséget, illetve a nagy számok gyenge törvényének a bizonyítását a Csebisev egyenlőtlenség segítségével.

Csebisev egyenlőtlenség: *Ha a ξ valószínűségi változó második momentuma $E\xi^2 = m^2$, akkor tetszőleges $x > 0$ számra*

$$P(|\xi| > x) \le \frac{m_2}{x^2}.$$

Innen következik, ha ezt az egyenlőtlenséget a $\bar{\xi} = \xi - E\xi$ valószínűségi változóra alkalmazzuk, hogy

$$P(|\xi - E\xi| > x) \le \frac{\operatorname{Var}\xi}{x^2},$$

Megjegyzés: A Csebisev egyenlőtlenség a Markov egyenlőtlenség következménye, amely szerint $P(|\xi| > x) \le \frac{E|\xi|}{x}$. Alkalmazva ezt az állítást a ξ^2 valószínűségi változóra kapjuk a Csebisev egyenlőtlenséget. Hasonló módon, alkalmazva a Markov egyenlőtlenséget a ξ^{2k} valószínűségi változóra, ahol k tetszőleges pozitív egész szám, $x > 0$, kapjuk, hogy $P(|\xi| > x) \le \frac{E\xi^{2k}}{x^{2k}}$

A nagy számok gyenge törvényét úgy bizonyítottuk be, hogy megvizsgáltuk milyen becslést ad a Csebisev egyenlőtlenség annak valószínűségére, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga legalább ε-nal eltér e változók várható értékétől. Idézzük fel ezt a számolást, illetve ezzel párhuzamosan vizsgáljuk meg azt is, milyen becslést kapunk, ha továbbre is azt a valószínűségi változót vizsgáljuk, amelyet úgy kapunk, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga minusz azok várható értékét vesszük, de most ennek a valószínűségi változónak nemcsak a második momentumát számoljuk ki, mint tettük a Csebisev egyenlőtlenség alkalmazásában, hanem a negyediket is. Látni fogjuk, hogy ekkor érdekes új eredményeket kapunk.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Tegyük fel, hogy $E\xi_1 = 0$, és vizsgáljuk az

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2, \quad E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{és} \quad P\left(\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right| > \varepsilon\right), \ \varepsilon > 0$$

kifejezéseket. Az utolsó valószínűség vizsgálatában nem jelent megszorítást az $E\xi_1 = 0$ feltétel, mert a ξ_j valószínűségi változókat a $\xi_j - E\xi_j$ valószínűségi változókkal helyettesítve az általános esetet erre a speciális esetre redukálhatjuk.

$$\operatorname{Var}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}S_n = \frac{n}{n^2}\operatorname{Var}\xi_1 = \frac{1}{n}\operatorname{Var}\xi_1, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\operatorname{Var}\xi_1}{n\varepsilon^2}.$$

Innen következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)=0$, tehát érvényes a nagy számok gyenge törvénye.

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4=\frac{1}{n^4}E(\xi_1+\cdots+\xi_n)^4,$$

$$\begin{aligned}E(\xi_1+\cdots+\xi_n)^4&=\sum_{k=1}^n E\xi_k^4+6\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}}E\xi_j^2E\xi_k^2+4\sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}}\underbrace{E\xi_j^3E\xi_k}_{=0}\\&\quad+4\sum_{\substack{1\le j,k,l\le n\\ j,k,l \text{ különböző számok}}}\underbrace{E\xi_j^2E\xi_kE\xi_l}_{=0}\\&\quad+\sum_{\substack{1\le j,k,l,m\le n\\ j,k,l,m \text{ különböző számok}}}\underbrace{E\xi_jE\xi_kE\xi_lE\xi_m}_{=0}\\&=nE\xi_1^4+6n(n-1)(E\xi_1^2)^2,\end{aligned}$$

ezért

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)\le\frac{\frac1n E\xi_1^4+6\left(1-\frac1n\right)(E\xi_1)^2)}{n^2\varepsilon^4}\le\frac{\text{const.}}{n^2\varepsilon^4}.$$

Innen következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)<\infty$ minden $\varepsilon>0$ számra, és a Borel–Cantelli lemma (könnyebbik feléből) következik, hogy minden $\varepsilon>0$ számra és majdnem minden $\omega\in\Omega$ pontban teljesül, hogy $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right|\le\varepsilon$, ha $n\ge n_0(\omega)$. Alkalmazva ezt a relációt minden $\varepsilon=\frac1k$ számra $k=1,2,\dots,$ kapjuk a nagy számok erős törvényét, amelyet az alábbi tételben fogalmazunk meg.

A nagy számok erős törvényéről szóló tétel egy *gyenge formája*: *Legyen $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független egyforma eloszláaú valószínűségi változók sorozata egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, amelyekre teljesül az $E\xi_1^4<\infty$ feltétel, és vezessük be az $S_n=\sum\limits_{j=1}^n\xi_j$ valószínűségi változókat. Ekkor az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ valószínűségi változók majdnem minden $\omega\in\Omega$-ra konvergálnak ez $E\xi_1$, számhoz, azaz ezek a valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét.*

Megfogalmazom a nagy számok gyenge törvényét kimondó tételt eredeti, éles formájában is.

A nagy számok erős törvényét kimondó tétel. *Legyen ξ_1, ξ_2, $\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $S_n=\sum\limits_{k=1}^n\xi_k$, $n=$*

$1, 2, \ldots,$ *részletösszegeket. Az* $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *sorozat akkor és csak akkor konvergál pozitív valószínűséggel, ha* $E|\xi_1| < \infty$. *Ha* $E|\xi_1| < \infty$, *akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E\xi_1 \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega\textit{-ra.}$$

Láttuk, hogy a nagy számok különböző törvényeit kimondó tételekben az összeadandók momentumairól teszünk fel bizonyos feltételeket. Sőt, az utoljára kimondott tétel a nagy számok erős törvényéről, egyben jelzi azt, hogy ez a feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges feltétel is. Felmerülhet a kérdés, miért játszik olyan fontos szerepet a momentumok létezése ezekben az eredményekben.

A nagy számok törvényei olyan állítást fogalmaznak meg, hogy független valószínűségi változók átlagai egyfajta tipikus viselkedést mutatnak, amelyikben az egyes összeadandók hatása önmagában nem jelentős, azaz nagy valószínűséggel nem fordulhat elő, hogy van az összegben olyan kiugróan nagy értéket felvevő tag, amelynek hatása összemérhető az összes többi tag hatásával. Márpedig az, hogy egy valószínűségi változó valamely momentuma kisebb egy adott számnál olyan tulajdonságot fogalmaz meg, amely szerint a valószínűségi változó kis valószínűséggel vesz fel nagy értékeket. Ahhoz, hogy finomabb vizsgálatokat el tudjunk végezni, ki kell tudnunk fejezni a momentumok végességét az eloszlásfüggvények nyelvén. A következő lemma állítása érdekes lesz a nagy számok erős törvényének a bizonyításában.

Lemma. *A* ξ *valószínűségi változó abszolut értékének akkor és csak akkor létezik várható értéke, azaz akkor és csak akkor teljesül az* $E|\xi| < \infty$ *reláció, ha* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi| > n) < \infty$.

Kiegészítés. *Az alább ismertetendő bizonyítás finomításával be lehet látni, hogy a* $|\xi|$ *valószínűségi változónak akkor és csak akkor van véges második momentuma, ha* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$. *Általánosabban* $E|\xi|^k < \infty$ *valamilyen* $k = 1, 2, \ldots,$ *számra akkor és csak akkor, ha* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1}P(|\xi| > n) < \infty$. *De ezen állítások bizonyítását, amelyekre nem lesz szükségünk elhagyjuk.*

A Lemma bizonyítása: Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor a ξ valószínűségi változó csak egész értékeket vesz fel. Ekkor az $E|\xi| < \infty$ reláció definició szerint akkor és csak akkor teljesül, ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nP(|\xi| = n) < \infty$. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\left(P(|\xi| > n-1) - P(\xi < n)\right) < \infty$, és bármely rögzített N egész számra

$$\sum_{n=0}^{N} nP(|\xi| = n) = \sum_{n=0}^{N} n\left(P(|\xi| > n-1) - P(|\xi| > n)\right) = \sum_{n=0}^{N-1} P(|\xi| > n) - NP(|\xi| > N). \tag{$*$}$$

Ha $E|\xi|=\infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^\infty P(|\xi|>n)=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N-1} P(|\xi|>n)\ge \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} nP(|\xi|=n)=\infty$ a $(*)$ reláció alapján. Ha $E|\xi|<\infty$, akkor $NP(|\xi|>N)\le E|\xi|$ minden N-re, azaz az előző kifejezésnek van egy N-től független felső becslése. Ezért $\sum\limits_{n=1}^\infty P(|\xi|>n)=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N-1} P(|\xi|>n)\le \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N} nP(|\xi|=n)+\text{const.}<\infty$, szintén a $(*)$ reláció alapján.

Egy általános ξ valószínűségi változó esetén definiáljuk a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változókat úgy, hogy $k\le|\xi|<k+1$ esetén $\xi_1=k$, $\xi_2=k+1$, $k=0,1,2,\dots$. Ekkor $\xi_1\le|\xi|\le\xi_2$, és $\xi_2-\xi_1\equiv1$, ezért az $E\xi_1$, $E|\xi|$ és $E\xi_2$ várható értékek egyszerre végesek vagy végtelenek. Továbbá $\sum\limits_{n=0}^\infty P(|\xi|>n)=\sum\limits_{n=0}^\infty P(\xi_2>n)$, ezért a Lemma állítása az általános esetben következik annak már bebizonyított speciális esetéből.

Megmutatjuk az előbbi feladat eredményének és a Borel–Cantelli lemmának a segítségével, hogy amennyiben $E|\xi_1|=\infty$, akkor a ξ_1 valószínűségi változóval azonos eloszlású ξ_j, $j=1,2,\dots$, független valószínűségi változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Pontosabban azt állítjuk, hogy ebben az esetben az $S_n(\omega)=\sum\limits_{j=1}^n\xi_j(\omega)$, $n=1,2,\dots$, összegekre az $S_n(\omega)$ majdnem minden $\omega\in\Omega$ pontban nem konvergens.

Valóban, az előbb megfogalmazott eredmény, és a ξ_j valószínűségi változók azonos eloszlása miatt az $E|\xi_1|=\infty$ feltételből következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^\infty P(|\xi_1|>n)=\sum\limits_{n=1}^\infty P(|\xi_n|>n)=\infty$. Ezért, és a ξ_n valószínűségi változók függetlensége miatt a Borel–Cantelli lemmából következik, hogy majdnem minden $\omega\in\Omega$-ra $|\xi_n(\omega)|>n$ végtelen sok az (ω elemi eseménytől függő) n indexre. Valóban, tegyük fel, hogy valamely $\omega\in\Omega$ elemi eseményre $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n(\omega)}{n}=a$ valamilyen véges a számra, amelyik értéke függhet az ω elemi eseménytől. Ekkor viszont a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}(\omega)}{n}=a$ reláció is teljesül, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{S_n(\omega)}{n}-\dfrac{S_{n-1}(\omega)}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\xi_n(\omega)}{n}=0$. Ez a reláció viszont, mint láttuk egy 1 valószínűségi halmazon nem teljesül.

Láttuk, hogy mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének bizonyításához arra van szükségünk, hogy képesek legyünk független (és egyforma eloszlású), nulla várható értékű $\xi_1,\xi_2,\dots$, valószínűségi változók $S_n=\sum\limits_{j=1}^n\xi_j$, $n=1,2,\dots$, összegének eloszlásfüggvényére jó becslést tudjunk adni. Pontosabban arra van szükségünk, hogy jól meg tudjuk becsülni minden n indexre és rögzített $\varepsilon>0$ számra a $P(|S_n|>\varepsilon n)$ valószínűségeket. Valójában a nagy számok erős törvényének a bizonyításában hasznosabb, ha a $P\left(\sup\limits_{1\le m\le n}|S_m|>\varepsilon n\right)$ valószínűségeket tudjuk jól megbecsülni. Első látásra azt gondolhatnánk, hogy az ilyen valószínűségek becslésére alkalmazhatnánk a centrális határeloszlástételt. Valójában a helyzet bonyolultabb.

A centrális határeloszlástétel jó aszimptotikát ad a $P(S_n > x\sqrt{n})$ valószínűségekre nagy n indexre, és rögzített x számra. De szabad-e rögzített x helyett n-től függő $x_n = \varepsilon\sqrt{n}$ számot írni, és alkalmazni formálisan a centrális határeloszlásban szereplő képletet nem törődve az x_n számnak az n indextől való függésével? Az, hogy e kérdés felvetésénél nem formális kötőzködésről van szó mutatja a következő egyszerű példa: Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$, $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$. Ekkor a $p_n(x) = P(S_n \ge nx)$ valószínűségre $p_n(x) = 0$, ha $x > 1$, és $p_n(x) = 2^{-n}$, ha $x = 1$. (Az $x < 1$ esetben is jó aszimptotikus formulát lehet adni a $p_n(x)$ mennyiségre, de ahhoz külön vizsgálódás lenne szükséges, ezért ezt most nem tesszük.) Ez a példa azt mutatja, hogy a $p_n(x)$ függvény nem úgy viselkedik, ahogy a centrális határeloszlástételből adódó formális analógia sugallná. A $P(S_n \ge nx)$ alakú valószínűségek vizsgálatával a valószínűségszámítás egyik fontos és érdekes fejezete a nagy eltérések elmélete foglalkozik. Ez az elmélet nem témája a jelen előadássorozatnak.

A nagy számok erős törvényének a bizonyítását nem dolgozom ki. Mindössze azt teszem, hogy megfogalmazom a valószínűségszámítás egy fontos egyenlőtlenségét, amelynek az itt nem tárgyalt bizonyítása is tanulságos, és a részletek kidolgozása nélkül jelzem, hogyan következik a Kolmogorov egyenlőtlenségből a nagy számok erős törvénye.

Annak szükséges és elégséges feltétele is ismert, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók teljesítsék a nagy számok gyenge törvényét. Megfogalmazom ezt az eredményt, de az állítás bizonyítását elhagyom. Sőt ennek az eredménynek az ismeretét sem várom el a vizsgán.

Tétel. *Legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata F eloszlásfüggvénnyel. Ezek a valószínűségi változók akkor és csak akkor teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, azaz a $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ átlag akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan $n \to \infty$ esetében egy a számhoz, $-\infty < a < \infty$, ha*

$$\lim_{x\to\infty} x\,[F(-x) + (1 - F(x))] = 0, \quad \textit{és} \quad \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} xF(\,dx) = a.$$

Ha összehasonlítjuk a nagy számok gyenge és erős törvényét azt látjuk, hogy a nagy számok gyenge törvénye némileg enyhébb megkötések mellett érvényes mint a nagy számok erős törvénye. Érdemes látni független, egyforma eloszlású valószínűségi változók olyan sorozatát, amelyik teljesíti a nagy számok gyenge, de nem teljesíti a nagy számok erős törvényét. Ilyen példát fogalmazok meg a következő nem kötelező házi feladatban. Egyben jelzem, hogyan lehet bebizonyítani azt, hogy ez a példa teljesíti a nagy számok gyenge törvényét anélkül, hogy felhasználnánk a nem bizonyított tételt a nagy számok gyenge törvényének szükséges és elégséges feltételéről.

Nem kötelező házi feladat

Legyen ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x) = \dfrac{C}{x^2 \log |x|}$, ha $|x| > 2$. $f(x) = 0$, ha $|x| \le 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. $\left(\displaystyle\int_{|x|>2} \frac{C\,dx}{x^2 \log |x|} = 1.\right)$ Definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy $E|\xi_1| = \infty$, ezért ezek a valószínűségi változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Másrészt az $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Segítség: Legyen $\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_k^{(n)} = \xi_k I\left(|\xi_k| \le a_n\right)$, $\bar{\bar{\xi}}_k = \bar{\bar{\xi}}_k^{(n)} = \xi_k I\left(|\xi_k| > a_n\right)$, és $\bar{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k$, $\bar{\bar{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\bar{\xi}}_k$. Ekkor $P(|S_n| > \varepsilon n) \le P\left(|\bar{S}_n| > \dfrac{\varepsilon}{2} n\right) + P\left(|\bar{\bar{S}}_n| > \dfrac{\varepsilon}{2} n\right) \le \dfrac{\operatorname{Var} \bar{S}_n}{\frac{\varepsilon^2}{4} n^2} + nP\left(\bar{\bar{\xi}}_1 \ne 0\right)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n = n$) jó becslést a $P(|S_n| > n\varepsilon)$ valószínűségre.

Természetesen felvetődik a következő kérdés: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_1 = 0$. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor a nagy számok gyenge törvénye szerint a $\dfrac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, a nagy számok erős törvénye szerint pedig egy valószínűséggel is nullához tartanak. Hogyan lehet élesíteni a nagy számok gyenge illetve erős törvényét? Pontosabban fogalmazva, milyen a_n, $n = 1, 2, \dots$ sorozatokra mondhatjuk, hogy $\dfrac{S_n}{a_n}$ sztochasztikusan tart nullához, ha $n \to \infty$? Milyen b_n, $n = 1, 2, \dots$ sorozatokra mondhatjuk, hogy $\dfrac{S_n}{b_n}$ egy valószínűséggel tart nullához, ha $n \to \infty$? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy olyan valószínűségi változókat tekintünk, amelyeknek van második momentumuk.

Az első kérdésre a válasz viszonylag egyszerű következménye a centrális határeloszlástételnek, és ezt tartalmazza a következő feladat. A második kérdésre a választ nehezebb megadni. Erre a kérdésre az alább megfogalmazott bizonyítás nélkül közölt iterált logaritmustétel adja meg a választ.

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_1 = 0$ és $E\xi_1^2 < \infty$. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor pozitív valós számok valamely a_n sorozatára a $\dfrac{S_n}{a_n}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan nullához $n \to \infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty$.

Végül megfogalmazom a valószínűségszámítás egyik híres eredményét, az úgynevezett iterált logaritmus tételt

Iterált logaritmus tétel. *Legyenek $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyekre $E\xi_1(\omega) = 0$, $\operatorname{Var} \xi_1(\omega) = \sigma^2 < \infty$. Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = 1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre,}$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log\log n}} = -1, \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ elemi eseményre.}$$

Kiegészítés:

Ebben a kiegészítésben bebizonyítom a nagy számok törvényének elégségességről szóló felét az alább megfogalmazott Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével. Pontosabban, azt látom be, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amely teljesíti az $E|\xi_1| < \infty$ feltételt, akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét is.

Kolmogorov egyenlőtlenség. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, (nem feltétlenül egyforma eloszlású) valószínűségi változók, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$, $S_k = \sum\limits_{p=1}^{k} \xi_p$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor*

$$P\left(\sup_{1\le k\le n} |S_k| \ge x\right) \le \frac{ES_n^2}{x^2} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2}{x^2}$$

minden $x > 0$-ra.

Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a felső becslést adja annak valószínűségére, hogy az S_k részletösszegek szuprémuma nagyobb mint valamilyen $x > 0$ szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad annak az eseménynek a valószínűségére, hogy az utolsó tag S_n nagyobb, mint x. Természetesen

$$P\left(\sup_{1\le k\le n} |S_k| > x|\right) \ge P\left(S_n| > x|\right),$$

de mint ahogy a Kolmogorov és Csebisev egyenlőtlenség összehasonlítása is sugallja a fenti egyenlőtlenség baloldala nem sokkal nagyobb mint a jobboldala.

A nagy számok erős törvényének bizonyításvázlata a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével. Természetes gondolat szétválasztani a ξ_n valószínűségi változók túl nagy és nem túl nagy értékeinek a hatását a bizonyításban. Ez sugallja, hogy érdemes a ξ_n valószínűségi változók következő felbontását venni: $\xi_n = \xi_n I(|\xi_n| \le n) + \xi_n I(|\xi_n| > n) = \xi'_n + \xi''_n$, ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Azt, hogy a ξ_n valószínűségi változó értékeit az n szinten csonkítottuk az teszi természetessé, hogy az egyik az előadáson tárgyalt eredmény szerint az $E|\xi_1| < \infty$ feltétel ekvivalens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(\xi''_n = 0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| > n) < \infty$ feltétellel, ami azt jelenti, hogy egy valószínűséggel, a ξ''_n valószínűségi változók véges sok kivétellel nullával egyenlőek. Ez azt jelenti, hogy elég a véges szórással rendelkező ξ'_n valószínűségi változók összegeinek maximumára jó becslést adni. Ez lehetséges a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével, ha jó becslést tudunk adni a ξ'_n valószínűségi változók várható értékére és szórásnégyzetére.

Némi nem túl nehéz, de itt nem tárgyalt számolás segítségével meg lehet mutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} E\xi'_k = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} E\xi''_k = 0$, és ez lehetővé teszi a feladat redukálását arra a problémára, hogy a $\bar\xi_k = \xi'_k - E\xi'_k$ valószínűségi változók $\bar S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar\xi_k$ összegei teljesítik a $\frac{\bar S_n}{n} \to 0$ relációt 1 valószínűséggel. Ez a redukció azért hasznos, mert ekkor független, nulla várható értékű valószínűségi változók átlagát kell vizsgálni, és ekkor alkalmazhatjuk a Kolmogorov egyenlőtlenséget. Némi (az integrálok átrendezésén múló, de itt nem tárgyalt) számolás segítségével megmutatható, hogy teljesül a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} \bar\xi_k}{k^2} < \infty$ azonosság. Ennek felhasználásával a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével a következő becsléseket hajthatjuk végre.

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{2^{n-1}<k\le 2^n} |S_k - S_{2^{n-1}}| > \varepsilon 2^{n-1}\right) &= P\left(\sup_{1\le k\le 2^{n-1}} \left|\sum_{j=1}^{k} \xi_{j+2^{n-1}}\right| > \varepsilon 2^{n-1}\right) \\
&\le \frac{\sum\limits_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \operatorname{Var} \xi_k}{\varepsilon^2 2^{2(n-1)}} \le \text{const.} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\operatorname{Var} \xi_k}{\varepsilon^2 k^2},
\end{aligned}
$$

ahonnan a $\bar\xi_k$ valószínűségi változók szórásnégyzetére felírt becslés alapján

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{2^{n-1}<k\le 2^n} |S_k - S_{2^{n-1}}| > \varepsilon 2^{n-1}\right) < \infty.
$$

Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján egy valószínűséggel

$$
\sup_{2^{n-1}<k\le 2^n} |S_k(\omega) - S_{2^{n-1}}(\omega)| \le \varepsilon 2^{n-1} \quad \text{véges sok (ω-tól függő) n index kivételével.}
$$

Innen viszont $S_N(\omega) \le \sum\limits_{n\colon\, 2^{n-1}\le N} \sup\limits_{2^{n-1}<k\le 2^n} |S_k(\omega) - S_{2^{n-1}}(\omega)| \le \text{const.} + 4N\varepsilon$ majdnem minden ω-ra egy csak ω-tól függő konstanssal. Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$-ra és N-re igaz, innen következik a nagy számok erős törvénye.