A Valószínűségszámítás I. előadássorozat harmadik előadása.

2003. február 18.

Összefoglaló:

Feltételes valószínűség tárgyalása. (folyatás)

Megismétlem a feltételes valószínűség előző előadáson ismertetett definicióját.

Feltételes valószínűség definiciója. *Adva egy B esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre $P(B) > 0$, egy ugyanezen a valószínűségi mezőn lévő A esemény feltételes valószínűsége feltéve a B eseményt (azaz a B esemény bekövetkezését)*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

A feltételes és hagyományos valószínűség fogalmai között fogalmaz meg kapcsolatot a következő lemma.

Lemma. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és legyen rajtva adva egy $B \in \mathcal{A}$ esemény, amelyre $P(B) > 0$. Vezessük be a P_B, $P_B(A) = P(A|B)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvényt a $\mathcal{A}$ σ-algebrán. Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ szintén valószínűségi mező.*

Megjegyzés: Ez az állítás megtalálható a Fazekas könyv 3.5 feladatában. Ugyancsak ezen az oldalon található a 3.2 Állítás, amely nagyon hasonló ehhez. Egy különbség van a két állítás között. Mi az eredeti valószínűségi mező σ-algebráját nem változtattuk meg. A Fazekas könyv 3.2 állításában az $A \cap B$, $A \in \mathcal{A}$ alakú halmazokra van megszorítva a σ-algebra.

Bizonyítás: $P_B(\Omega) = 1$, $\mathcal{A}$ σ-algebra, azt kell még ellenőrizni, hogy P_B σ-additiv az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, azaz, ha A_n, $n = 1, 2, \dots$, diszjunkt halmazok, akkor $P_B\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$. Viszont ebben az esetben az $A_n \cap B$ halmazok is diszjunktak, ezért

$$\begin{aligned} P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n). \end{aligned}$$

Megfogalmaztunk néhány egyszerű állítást a feltételes valószínűségről. Ezeket nem kell feltétlenül megtanulni, mert olyan összefüggéseket fejeznek ki, amelyekre az ember magától is rájön. Fontosabb inkább megérteni azt, hogy a tárgyalt példákban ezeket az összefüggéseket hogyan használjuk.

Először felidéztük a Fazekas könyv 3.6 definicióját (33. oldal), amely lényegében nem más mint a halmazelméletben szereplő partició fogalmának újrafogalmazása a valószínűségszámítás terminológiájával.

Teljes eseményrendszer definiciója *Legyen adva egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező, azon* $A_n \in \mathcal{A}$ *események (halmazok) véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere. Azt mondjuk, hogy az* A_n *események teljes eseményrendszert alkotnak, ha azok diszjunkt halmazok (más szóval egymást kizáró események), és* $\bigcup\limits_n A_n = \Omega$.

Megjegyzés: Ha egy A halmazt előállítunk véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt A_n halmaz uniójaként, azaz $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$, akkor egy ilyen előállítást az A halmaz particiójának nevezünk. Ennek az általánosan használt fogalomnak a felhasználásával egy teljes eseményrendszert az Ω biztos esemény particiójának is nevezhetünk.

Teljes valószínűség tétele. *Alkossanak a* B_n *halmazok pozitív valószínűségi halmazokból álló teljes eseményrendszert. Ekkor tetszőleges* A *halmazra*

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots .$$

(Lásd Fazekas könyv 3.7 tételét a 33. oldalon.)

A Tétel bizonyítása:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots .$$

Bayes formula. (lásd Fazekas könyv 35. oldal.)

$$P(B|A) = P(A|B)\frac{P(B)}{P(A)}, \quad \text{ha } P(A) > 0, \text{ és } P(B) > 0.$$

Megfogalmazzuk a következő (egyszerű) eredményt, amelyet hívnak néha a teljes eseményrendszerről szóló tételnek is. (Lásd Fazekas könyv 3.10 Tétel a 36. oldalon).

Tétel. *Legyen adva egy* A *esemény és egy* $B_1, B_2, \cdots$, *teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n)} \quad \textit{minden } i = 1, 2, \ldots, \textit{ számra.}$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a felírt kifejezésben a számláló

$$P(A|B_i)P(B_i) = P(A \cap B_i),$$

a nevező pedig $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n) = P(A)$.

Megjegyzés: Az előző tételben szereplő formula azért hasznos, mert a következő gyakran előforduló problémának a megoldásában segít. Ismerjük egy A esemény $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, ... feltételes valószínűségeit feltéve egy $B_1, B_2, \dots,$ teljes eseményrendszert, de minket a $P(B_i|A)$, $i = 1, 2, \dots,$ feltételes valószínűségek érdekelnek. E tétel eredménye szerint ezeket egyszerűen ki tudjuk számítani, ha ismerjük a $P(B_n)$, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségeket is.

Konkrét esetekben ezekre az összefüggésekre magunk is rájöhetünk anélkül, hogy a formális képleteket nézzük. Tekintettünk néhány példát.

Feladatok:

Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik, és összekeverik azokat. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?
Megoldás: Jelölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $PB(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2}. \end{aligned}$$

Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?
Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

A következő (egyszerű) feladat célja az, hogy összehasonlítsuk annak eredményét az előbb tárgyalt feladat eredményével, és megbeszéljük mást jelent az a feltételt, hogy két kockadobás közül az egyik megnevezett dobás (például az első dobás) hatos, és az hogy adódott hatos dobás. Képesek vagyunk-e szemléletünk alapján számolás nélkül megmondani, hogy melyik feltevés mellett nagyobb annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos?

Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos, feltéve hogy az első dobás hatos?
Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, A_2 pedig azt az eseményt, hogy a második dobás hatos. Ekkor $A_1 \cap A_2$ az az esemény, hogy mind a két dobás hatos, és minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Viszont, $P(A_1 \cap A_2|A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \dfrac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = \dfrac{1}{6}$.

A következő feladattal a gyakorlaton foglalkozunk.

Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\dfrac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\dfrac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Ezután a következő feladatot tárgyaltuk. (lásd a Fazekas könyvben a 3.4 Példát a 32. oldalon)

Ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír.

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy a legrosszabb diák ír dolgozatot, B azt az eseményt, hogy a legjobb diák ír dolgozatot. Ekkor mi a $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámítani. Viszont $P(A \cap B) = \dfrac{\binom{n-2}{r-2}}{\binom{n}{r}}$, mert $\binom{n-2}{r-2}$ olyan választás van, amelyben mind a legjobb mind a legrosszabb diák ír dolgozatot, összesen $\binom{n}{r}$ választás van, és minden választás egyforma valószínű. Hasonlóan, $P(B) = \dfrac{\binom{n-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$. Innen egyszerű számolással

$$P(A|B) = \frac{\dbinom{n-2}{r-2}}{\dbinom{n-1}{r-1}} = \frac{r-1}{n-1}.$$

A gyakorlaton e feladatnak más heurisztikus tárgyalását is vizsgáltuk, illetve azt, hogy miért adnak a heurisztikus érvelések helyes eredményt.

Események függetlensége.

Események és a később tárgyalandó valószínűségi változók függetlensége a valószínűségszámítás egyik legfontosabb fogalma. Heurisztikusan azt mondhatjuk, hogy egy A esemény akkor független egy B eseménytől, ha az A esemény bekövetkezése vagy be nem következése nem befolyaásolja annak valószínűségét, hogy a B esemény bekövetkezik-e. Ez azt sugallja, hogy a B esemény akkor független az A eseménytől, ha $P(B|A) = P(B)$. Ezt az összefüggést átrendzve jutunk a következő definicióhoz.

Két esemény függetlenségének a definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy A és B esemény független, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Ez a definició azonban önmagában nem kielégítő számunkra. Beszélni akarunk több esemény függetlenségéről is. Ezért a következő definiciót is bevezetjük.

Több esemény függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára*

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1, A_2, \dots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

Speciálisan $n = 3$ esetben ez a definició a következőt jelenti: Az A, B és C események akkor függetlenek, ha a következő azonosságok *mindegyike* teljesül:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned}$$

Megjegyzés: Alább bevezetjük események páronkénti függetlenségének az irodalomban szintén használt fogalmát. Fontos, hogy események páronkénti függetlenségének és (teljes) függetlenségének a fogalmát meg tudjuk különböztetni egymástól.

Események páronkénti függetlenségének a definiciója. *Legyen $A_1, A_2, \dots,$ események (véges vagy végtelen) sorozata egy valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek az események páronként függetlenek, ha tetszőleges különböző számokból álló (j, k), $j \neq k$, indexekre $P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k)$.*

Megmutatandó, hogy az események (teljes) függetlenségének definiciójában szereplő feltételek mindegyike fontos tekintsük a következő feladatot.

> Adjunk példát egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, amelyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.
> *Egy lehetséges konstrukció:* Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$,

$P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u\in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ és $A_3 = \{1,4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x + y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x + y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$, továbbá $P(\{5\}) = \frac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyílván $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

Lássunk példát arra is, hogy események páronkénti függetlenségéből nem következik azok függetlensége.

Példa: Definiálunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, azon három A_1, A_2, A_3-mal jelölt eseményt, amelyek páronként függetlenek, azaz $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, de nem teljesül a $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosság, tehát ezek az események nem függetlenek.

Álljon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben Ω 4 pontból, a jobb szemlélhetőség kedvéért legyenek ezek az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ pontok, álljon $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazából, és legyen $P(\{(1,1)\}) = P(\{(1,2)\}) = P(\{(2,1)\}) = P(\{(2,2)\}) = \frac{1}{4}$. Tekintsük az $A_1 = \{(1,1),(1,2)\}$ $A_2 = \{(1,1),(2,1)\}$ és $A_3 = \{(1,1),(2,2)\}$ halmazokat. Ekkor teljesülnek a $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ azonosságok, mert $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, és mivel $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \{(1,1)\}$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$. Másrészt, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, mert $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{4}$, és $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$.

Fogalmazzuk meg a független eseményekre vonatkozó tulajdonságok közül a legfontosabbakat.

Lemma. *Ha $A_1, \dots, A_n$ független események, és bevezetjük az $A_j^1 = A_j$ és $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ jelöléseket, akkor tetszőleges $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \le j \le n$, sorozatra az $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ események függetlenek.*

Indoklás: Elég belátni, hogy egy A_j halmaz kicserélése az A_j^{-1} halmazra nem változtatja meg a halmazrendszer függetlenségét. Továbbá az indexek szimmetria tulajdonsága miatt elég a $j = 1$ esettel foglalkozni. Ezután a függetlenséget definiáló relációk közül elég azokat ellenőrizni, amelyekben a $j = 1$ index szerepel. Azt kell megmutatni. hogy az $A_1, \dots, A_n$ események függetlensége esetén teljesül az

$$P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \dots \cap A_{l_s}) = P(\Omega \setminus A_1) P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s})$$

azonosság minden $2 \leq l_1 < \cdots < l_s$ indexre. Viszont ekkor

$$\begin{aligned}
P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) &= P(A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) - P(A_1 \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) \\
&= P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) - P(A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\
&= (1 - P(A_1))P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\
&= P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}).
\end{aligned}$$

Lemma. *Legyenek $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ események függetlenek egymástól. Tetszőleges olyan C eseményre, amelyik előállítható az $A_1, \ldots, A_k$ halmazokból véges sok metszet, unió és komplementerképzés segítségével igaz, hogy a $B_1, \ldots, B_m$ és C halmazok függetlenek.*

Emlékeztető 1. *Tanulták, hogy mindent adott halmazokból unió, metszet és komplementer képzéssel előállítható halmaz megadható úgynevezett konjunktív vagy diszjunktív normálformában. Ez a következőt jelenti. Legyen adva egy Ω halmaz véges sok $A_1, \ldots,$ A_n részhalmaza, és jelölje $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ az A_j halmaz komplementerét, $1 \leq j \leq n$. Vezessük be továbbá az $A^1 = Aj$ jelölést és az $\varepsilon_j = \pm 1$, $1 \leq j \leq n$ számokat valamint az összes lehetséges $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ alakú sorozatból álló halmazt. Ekkor minden az $A_1, \ldots, A_n$ halmazokból véges sok unió, metszet és komplementer segítségével előállítható C halmaz megadható a következő módon is: Létezik a Σ halmaznak olyan $J = J(C) \subset \Sigma$ részhalmaza, amelyre*

$$C = \bigcup_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in J} (A_1^{\varepsilon_1} \cap A_2^{\varepsilon_2} \cap \cdots \cap A_n^{\varepsilon - n})$$

(konjunktív normálforma), és létezik a Σ halmaznak olyan $\bar{J} = \bar{J}(C) \subset \Sigma$ részhalmaza, amelyre

$$C = \bigcap_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \bar{J}} (A_1^{\varepsilon_1} \cup A_2^{\varepsilon_2} \cup \cdots \cup A_n^{\varepsilon - n})$$

(diszjunktív normálforma).

Emlékeztető 2. *Bár erre nem lesz szükségük, idézzük fel a diszjunktív és konjunktív normálforma létezésének egy lehetséges indoklását. Mindegyik A_j, $1 \leq j \leq n$, halmaz előállítható ilyen alakban. Ebben a speciális esetben a $J = \bar{J}$ halmazt úgy választjuk, mint azon $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sorozatok halmazát, amelyeknek a j-ik koordinátája $\varepsilon_j = 1$. Ezután elég belátni, hogy amennyiben két B_1 és B_2 halmaz előállítható konjunktív és diszjuntív normálformában, akkor ugyanez igaz a $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cup B_2$, $\Omega \setminus B_1$ és $\Omega \setminus B_2$ halmazokra is. Ez némi számolással megmugatható. E számolásban érdemes felhasználni az alábbi de Morgan formulának nevezett azonosságokat, amelyeket egyébként is tudni kell: $\overline{B_1 \cup B_2} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$, $\overline{B_1 \cap B_2} = \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2$, ahol $\bar{B}$ jelöli a B halmaz komplementerét. Általánosabban, tetszőleges $B_1, \ldots B_k$ halmazokra $\overline{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \cdots \cap \bar{B}_k$, és $\overline{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k} = \bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \cdots \cup \bar{B}_k$.*

A lemma indoklása: Minden ilyen C halmaz felírható konjunktív normálformában, azaz jelölését használva $C = \bigcup\limits_{(j_1, \ldots, j_n) \in J} A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ alakban, ahol J egy n hosszúságú

± 1 sorozatokból álló halmaz. Továbbá az ebben a kifejezésben szereplő $A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ események diszjunktak különböző $(j_1, d \dots, j_n)$ indexre diszjunktak, és az $A^{\varepsilon_{j_n}}$, $B_1, \dots,$ B_n események függetlenek. Felírva a függetlenség definicójában szereplő azonosságokat ezekre a halmazrendszerekre, majd azokat összeadva az összes $(j_1, \dots, j_n) \in J$ indexre megkapjuk a Lemma állítását.

Ezután tekintettünk néhány példát.

Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\dfrac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, (majdnem 1) vagy nagyon kicsi (majdnem nulla) érték?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j) = \dfrac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap\limits_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega \setminus A_j) = 1 - \dfrac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega \setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{1000} (\Omega \setminus A_j)\right) = \left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1 - \left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^{100}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^{100} = \left(\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10} \sim e^{-1/10}$. Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega = \{1, \dots, n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j = \{m \colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1 \le j \le k$. Legyen $B = \{m \colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek.

b. $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \dfrac{n}{p_j} p_j\right\}$ egy $\dfrac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \dfrac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\dfrac{n}{p_{j_1}\cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_s}) = \dfrac{1}{p_{j_1}\cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap\cdots\cap A_{j_s}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, $\dots$ A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega\backslash(A_1\cup\cdots\cup A_k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k}(\Omega\backslash A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(\Omega\setminus A_j) = \prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

Végül megfogalmaztam a valószínűségszámítás egyik fontos eredményét, a Borel–Cantelli lemmát. A lemma bizonyítása a következő előadás anyagához tartozik. Először informálisan ismertettem a problémát.

A kérdés a következő: Mikor mondhatjuk azt, hogy bizonyos események közül végtelen sok bekövetkezik: a.) egy valószínűséggel, b.) pozitív valószínűséggel. Például mikor mondhatjuk egy (vagy pozitív) valószínűséggel azt, hogy végtelen sok olyan nap van, amelyikben valami jó következik. Ez azt jelenti, hogy bármely nap bízhatunk abban, hogy nem múlt el az összes olyan nap, amelyben valami jó történik, tehát érdemes még élni.

Ahhoz, hogy a Borel–Cantelli lemmát megfogalmazzuk szükséges a halmazelmélet nyelvén megfogalmazni azt a tényt, hogy bízonyos események közül végtelen sok következik be. Ez azt jelenti, hogy adva végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény (halmaz) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, definiálni kell azt az eseményt, amelyiknek a valószínűségére kiváncsiak vagyunk.

Legyen adva végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondhatjuk, hogy ezek közül végtelen sok következik be, vagy formálisan megfogalmazva mely $\omega \in \Omega$ elemi eseményekre mondhatjuk, hogy $\omega \in A_n$ végtelen sok n indexre? Egy ω elemi esemény akkor és csak akkor teljesíti ezt a tulajdonságot, ha minden n-re $\omega \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, azaz minden n-re létezik olyan $m \ge n$ index amelyre $\omega \in A_m$. Ez akkor és csak akkor történik meg, ha $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Ez azt jelenti, hogy a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény valószínűségére vagyunk kiváncsiak, és erről ad információt a Borel–Cantelli lemma.

Borel–Cantelli lemma: *Legyen adva végtelen sok $A_1, A_2, \cdots$ esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. A követkaző két állítás igaz:*

a.) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következik be.

b.) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$*, és az* A_n*,* $n = 1, 2, \dots$*, események függetlenek, akkor*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel végtelen sok sok A_n *esemény következik be.*

Tegyünk néhány megjegyzést ezzel az eredménnyel kapcsolatban. Ha a $P(A_n)$ valószínűségek viszonylag kicsik, ami jelen esetben azt jelenti, hogy az összegük konvergens, akkor csak véges sok A_n esemény következik be 1 valószínűséggel. A másik irányú állításban nemcsak azt követeltük meg, hogy az események valószínűségei legyenek viszonylag nagyok, összegük legyen divergens, hanem azt is, hogy az egyes A_n események legyenek függetlenek. Ebben az esetben viszont erősebb állítást fogalmazhattunk meg. Nemcsak azt állítjuk, hogy ebben az esetben annak valószínűsége hogy végtelen sok A_n esemény következik be pozitív, hanem azt is, hogy ez a valószínűség 1. Ha tehát az A_n események függetlenek, akkor két lehetőség fordulhat elő. Vagy nulla valószínűséggel következik be végtelen sok A_n esemény (ha a valószínűségek összege konvergens) vagy pedig egy valószínűséggel (ha a valószínűségek összege divergens). Közbülső lehetőség nincs.

A b) esetben megfogalmazott eredményben az A_n események függetlensége nagyon fontos feltétel. Ezt a feltételt lehet gyengíteni, de teljesen elhagyni nem lehet. Ezt mutatja az alábbi két példa:

Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező a $[0, 1]$ intervallum, rajta a Borel mérhető halmazok σ-algebrája, és a P valószínűségi mérték a Lebesque mérték.

1. példa. Legyen $A_n = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ minden $n = 1, 2, \dots$, számra. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ezért $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \frac{1}{2}$.

2. példa. Legyen $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \emptyset$, ezért $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$.

Az első példában egy olyan esetet láttunk, amelyben annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n következik be, $\frac{1}{2}$, tehát sem nem nulla sem nem 1. A második példában egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következett be, noha a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ reláció teljesült. Természetesen egyik példában sem voltak a tekintett A_n események függetlenek. Ezek a példák mutatják, hogy a Borel–Cantelli tétel b) részében szereplő függetlenség feltétel lényeges. Az gyengíthető ugyan, de teljesen el nem hagyható.