A Valószínűségszámítás I. előadássorozat hatodik előadása.

2003. március 11.

Összefoglaló:

Néhány fontos diszkrét eloszlás.

a.) *Binomiális eloszlás.*

Tekintsünk először egy tipikus példát, amelyben a binomiális eloszlás megjelenik.

Dobjunk fel egy pénzdarabot n alkalommal egymástól függetlenül, és minden egyes dobásban legen p, $0 \le p \le 1$, a fejdobás valószínűsége. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan k fejdobás következik be?

Ennek valószínűsége $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$. Valóban, $\binom{n}{k}$ olyan fej-írás sorozat létezik, amely k fej és $n-k$ írás-jelet tartalmaz, és az adott feltételek mellett minden egyes ilyen dobássorozatnak a valószínűsége $p^k(1-p)^{n-k}$. Az ilyen jellegű feladatok leírására vezették be a binomiális eloszlás fogalmát.

Binomiális eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó binomiális eloszlású n és p paraméterrel, $n = 1, 2, \dots,$ $0 \le p \le 1$, ha $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ minden $0 \le k \le n$ számra, és $P(\xi = k) = 0$ egyébként. Ezt az eloszlást szokás $B(n,p)$-vel jelölni.*

Egy $B(1,p)$ eloszlású ξ valószínűségi változót, azaz egy olyan ξ valószínűségi változót, amelyre $P(\xi = 0) = 1-p$, $P(\xi = 1) = p$ Bernoulli eloszlásúnak is szoktak nevezni.

Jegyezzük meg, hogy valóban eloszlást, definiáltunk, azaz a nem-negatív valószínűségek összege egy, mert a binomiális tétel szerint

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Jegyezzük meg, hogy a $B(n,p)$ és $B(m,p)$ binomiális eloszlások konvoluciója a $B(n+m,p)$ binomiális eloszlás.

(Emlékeztetőül felidézem, hogy egy $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \dots\}$ és $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, \dots\}$ eloszlás konvoluciója az az $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots\}$ eloszlás melynek elemeit az $r_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$, $n = 1, 2, \dots,$ képlet határoz meg. Ennek valószínűségi tartalma a következő: Ha ξ és η két független, nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, amelyekre $P(\xi = n) = p_n$, $P(\eta = n) = q_n$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ akkor $\xi + \eta$ olyan nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, amelyre $P(\xi + \eta = n) = r_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Konvolució kiszámolása esetén sokszor hasznos lehet a következő észrevétel. Ha az előbb tekintett $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{R}$ eloszlásokhoz hozzárendeljük az $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $G(x) =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, $H(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n x^n$, hatványsorokat, akkor azok teljesítik az $F(x)G(x) = H(x)$ azonosságot. Továbbá e függvények ismeretében, szukcessziv deriválással majd a nulla érték behelyettesítésével ki lehet számolni az eloszlásokban szereplő számok értékeit. A fenti hatványsorokat szokás a megfelelő eloszlás generátorfüggvényének nevezni.

Valóban a fenti konvolucióról szóló állítás érvényes, mivel a tekintett két eloszlás konvoluciója egy olyan $p(k)$, $0 \le k \le n+m$ eloszlás, amelyre

$$\begin{aligned} p(k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{(m-(k-j))} \\ &= p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

mert

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

Ez utóbbi állításnak kombinatorikus bizonyítása a következő: Az $\{1, 2, \dots, n+m\}$ számok közül $\binom{n+m}{k}$ módon tudunk k számot kiválasztani. Ez az azonosság jobboldalán álló kifejezés. Ugyanakkor ezen lehetőségeket úgy is összeszámolhatjuk, hogy rögzítve egy j számot, $\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$ módon választhatunk ki az első n számból j-t és az $n+1, \dots, n+m$ számok közül $k-j$-t, majd összegezve $j = 0, \dots, k$-ra megkapjuk azon lehetőségek számát, ahány módon az első $n+m$ számból k-t ki tudunk választani. Ez azt jelenti, hogy a baloldalon szereplő összeg megegyezik a jobboldalon szereplő kifejezéssel.

Tanulságos lehet látni, hogyan lehet a fenti azonosságot, pontosabban annak egy lehetséges általánosítását bebizonyítani a hatványsoroknak a múlt órán említett tulajdonságai segítségével. Emlékeztetőül jegyezzük meg, hogy általában nem feltétlenül egész α számokra is definiáljuk az $\binom{\alpha}{k}$ számot mint $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtése alapján

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Továbbá,

$$(1+x)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} x^k, \quad \text{ha } |x| < 1,$$

és

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{k} x^k, \quad \text{ha } |x| < 1.$$

Mivel $(1+x)^\alpha(1+x)^\beta=(1+x)^{\alpha+\beta}$, ezért az együtthatók összehasonlításából kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j}=\binom{\alpha+\beta}{k}$$

nem feltétlenül egész és nem feltétlenül pozitív α és β számokra.

Feladat:

Adjunk egyszerű, a binomiális eloszlás valószínűségi tartalmát kihasználó bizonyítást arra, hogy a $B(n,p)$ és $B(m,p)$ binomiális eloszlások konvoluciója a $B(n+m,p)$ binomiális eloszlás.

Számítsuk ki egy $B(n,p)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. A legegyszerűbb módszer a következő: Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, $B(1,p)$ eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ $B(n,p)$ eloszlású valószínűségi változó, és $E\xi_j=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$, $E\xi_j^2=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$, $\operatorname{Var}\xi_j=E\xi_j^2-(E\xi_j)^2=p-p^2$ minden $j=1,\dots,n$ számra. Ezért a keresett várható érték és szórásnégyzet $E\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}E\xi_j=np$ és $\operatorname{Var}\xi=\sum\limits_{j=1}^{n}\operatorname{Var}\xi_j=np(1-p)$.

Feladat:

Számítsuk ki egy $B(n,p)$ eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét az e fogalmakat definiáló összegek kiszámításának a segítségével.

A binomiális eloszlás természetes többdimenziós általánosítása a polinomiális eloszlás. Ennek megértéséhez tekintsük a következő feladatot. Adva van r urna. Ezekbe bedobunk összesen n golyót egymástól függetlenül. Az egyes golyók p_1 valószínűséggel esnek az első p_2 valószínűséggel a második, ... p_r valószínűséggel az r-ik urnába. Mi a valószínűsége annak, hogy a j-ik urnába k_j golyó esik, $1\le j\le r$, $\sum\limits_{j=1}^{r}k_r=n$? Ez a valószínűség $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$, mert $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$ ilyen dobássorozat van, és minden ilyen dobássorozat valószínűsége $p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$.

Polinomiális eloszlás definiciója *A $(\xi_1,\dots,\xi_r)$ r változós véletlen vektor polinomiális eloszlású n, $n=1,2,\dots,$ és p_j, $1\le j\le r$, $\sum\limits_{j=1}^{r}p_j=1$ paraméterekkel, ha*

$$P(\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\dots,\xi_r=k_r)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

az olyan $0\le k_j\le n$, $1\le j\le r$ számokra, amelyekre $\sum\limits_{j=1}^{r}k_j=n$.

Feladat:

Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ polinomiális eloszlású véletlen vektor n és p_j, $1 \le j \le r$, $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$ paraméterekkel. Ekkor $E\xi_j = np_j$, $\operatorname{Var} \xi_j = np_j(1-p_j)$, $1 \le j \le r$, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = -np_jp_k$, $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$.

b.) *Negatív binomiális eloszlás és ennek speciális esete, a geometriai eloszlás.*

Most is tekintsünk először egy tipikus példát, amelyben ezek az eloszlások megjelennek.

Rögzítsünk egy r pozitív egész számot, és dobjunk fel egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra egymás után többször egymástól függetlenül, egészen addig amikor az r-ik fejdobás megjelenik. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a $k+r$-ik dobás?

Ez a valószínűség $\binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r$. Ez ugyanis azt jelenti, hogy az első $k+r-1$ dobásban pontosan $r-1$ fej és k írás dobás történt, aminek valószínűsége $\binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^{r-1}$, valamint a $k+r$-ik dobás fej, aminek a valószínűsége p, és független az előző eseménytől.

Negatív binomiális és geometriai eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó negatív binomiális eloszlású r, $r = 1, 2, \dots,$ és p, $0 < p \le 1$, paraméterrel, ha ξ $r, r+1, \dots,$ értékeket vesz fel és*

$$P(\xi = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Az $r = 1$ és p paraméterhez tartozó negatív binomiális eloszlást p paraméterű geometriai eloszlásnak is nevezik.

A korábbi gyakorlatok bizonyos eredményeiből következik, hogy a negativ binomiális eloszlás valóban valószínűségeloszlás, azaz $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r = 1$, mert egy végtelen pénzfeldobás sorozat esetében egy valószínűséggel előbb-utóbb megjelenik r darab fejdobás. Valójában ez az indoklás hallgatólagosan felhasznál egy igaz, de az előadáson nem bizonyított fontos eredményt. Azt használtuk fel, hogy a végtelen független fej-írás dobássorozatoknak van valószínűségi modellje, ezért alkalmazhatjuk rá a valószínűségszámítás eredményeit. (A nehézséget az okozza, hogy csak bizonyos eddig nem tanult mértékelméleti eredmények segítségével lehet bebizonyítani azt, hogy az ebben a modellben természetes módon definiált valószínűség valóban σ-additív.) De ez az állítás következni fog néhány más később bizonyítandó eredményből is. Tárgyaljuk meg a negatív binomiális eloszlás néhány fontos tulajdonságát.

Feladat:

Bizonyítsuk be valószínűségi meggondolások segítségével, hogy egy r_1 és p paraméterű valamint egy r_2 és p paraméterű negatív binomiális eloszlás konvalúciója egy r_1+r_2 és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségeloszlás. Következésképpen, egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlás előáll mint r darab p paraméterű geometriai eloszlás konvoluciója.

Lássuk be az alábbi feladatot közvetlen számolással is. Elég belátni azt, hogy egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valamint egy p paraméterű geometriai eloszlás konvoluciója egy $r+1$ és p paraméterű negatív binomiális eloszlás.

Azt kell belátni, hogy

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{r+j-1}{r-1}(1-p)^j p^r (1-p)^{k-j} p = \binom{k+r}{r}(1-p)^k p^{r+1}.$$

Ezt az azonosságot könnyen látjuk, ha tudjuk, hogy érvényes a következő azonosság:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{j+r-1}{r-1} = \binom{k+r}{r}.$$

Az utóbbi azonosság viszont következik például a következő kombinatorikai érvelésből. A természetes számok halmazán $\binom{k+r}{r}$ módon jelölhetünk ki $r+1$ számot úgy, hogy a (nagyság szerint) $r+1$-ik szám a $k+r+1$ szám legyen, és az azonosság jobboldala ezzel egyenlő. Ezt viszont úgyis kiszámolhatjuk, hogy azt tekintjük, hány olyan elrendezés van, amelyben az r-ik kijelölt pont a $j+r$, az $r+1$-ik pedig a $k+r+1$ szám, majd összegezünk $0 \le j \le k$-ra. Mivel rögzített j-re az ilyen elrendezéek száma $\binom{j+r-1}{r-1}$, innen következik a felírt azonosság.

Megmutatjuk, hogyan lehet a fenti összfüggést analitikus módon bebizonyítani. Tekintsük az r és p paraméterekhez tartozó $g_{r,p}(x)$ generátorfüggvényt, azaz az

$$g_{r,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r x^{k+r}$$

összeget. Ha belátjuk, hogy ez az összeg konvergens például az $-1 < x < 1$ intervallumon, valamint $g_{r_1,p}(x)g_{r_2,p}(x) = g_{r_1+r_2,p}(x)$, akkor innen az előző előadás végén tett észrevételekből következik az áll1tás. A $g_{r,p}(x)$ függvény viszont egyszerűen zárt alakra hozható. Ennek érdekében vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\binom{k+r-1}{r-1} = \binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!}\\ &= \frac{r(r+1)\cdots(k+r-2)(k+r-1)}{k!}\\ &= (-1)^k\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+2)(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k\binom{-r}{k},\end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g_{r,p}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-r}{k}(1-p)^k p^r x^{k+r} = (px)^r\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-r}{k}(-(1-p)x)^k \\ &= (px)^r(1-(1-p)x)^{-r} = \left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^r, \end{aligned}$$

ami az $(1+x)^{-r}$ függvény hatványsorának az alakjából látható. Innen viszont könnyen látható a generátorfüggvényekre felírt azonosság.

A fenti azonosság ad magyarázatot arra, hogy miért nevezzük a most tekintett eloszlásokat negatív binomiális eloszlásnak. Ugyanis, mivel $\binom{k+r-1}{r-1} = (-1)^k\binom{-r}{k}$,

$$P(\xi = k+r) = \binom{k+r-1}{r-1}(1-p)^k p^r = \binom{-r}{k}(p-1)^k p^r, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Számítsuk ki egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. Ezt könnyen kiszámíthatnánk a generátorfüggvény deriválásának segítségével, de ehelyett egy geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kiszámoljuk direkt módon, majd az általános esetet visszavezetjük erre.

Legyen ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel, azaz legyen $P(\xi = k+1) = p^k(1-p)$, $k = 0,1,\dots$. Ekkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1},$$

$E\xi^2 = p\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}$, és $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. Deriváljuk kétszer a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ azonosságot. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Innen $x = 1-p$ helyettesítéssel $\dfrac{1}{p^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$, $E\xi = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} = (1-p)\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \dfrac{2(1-p)}{p^3} + \dfrac{1}{p^2}$, $E\xi^2 = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p}$, $\operatorname{Var}\xi = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Feladat:

Számítsuk ki egy n és p paraméterű negatív binomiális eloszású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét annak az ismeretnek a segítségével, hogy egy p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{p}$ és szórásnégyzete $\frac{1-p}{p^2}$.

Tárgyaljuk meg, hogyan lehet egy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kiszámolni a generátorfüggvénye ismeretében. Sőt, lássunk be egy olyan formulát, amely általánosabb esetben is alkalmazható.

Legyen $\mathcal{P} = \{p_k : k = 1, 2, \dots\}$, $p_k \ge 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, valószínűség eloszlás a nem negatív egész számokon. Vezessük be az ezen eloszláshoz tartozó

$$g(x) = g_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

generátorfüggvényt. Vegyük észre, hogy a $g(x)$ függvényt definiáló hatványsor konvergens a $-1 < x < 1$ intervallumban. Továbbá kétszeri deriválás és az $x = 1$ (formális) helyettesítés azt sugallja, hogy

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k x^{k-1}, \quad g''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k x^{k-2},$$

valamint

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k, \quad g''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k,$$

és ezen azonosságok segítségével kiszámolhatjuk a keresett várható értéket és szórásnégyzetét. Ugyanis $E\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k = g'(1)$, $E\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k = g''(1) + g'(1)$, ahonnan $\operatorname{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$.

Felmerül a kérdés, szabad-e az alábbi számolásokat végrehajtani. A problémát az okozza, hogy hatványsorokat szabad tagonként deriválni a konvergenciatartomány belsejében, de mi az $x = 1$ helyettesítést hajtottuk végre, és lehet, hogy a $g(x)$ függvény hatványsora nem terjeszthető ki egy a $(-1, 1)$ intervallumnál nagyobb intervallumra. A negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye esetén egy ilyen kiterjesztés lehetséges, de érdemes az általános esetet is tekinteni, és ekkor nem szabad kizárni ezt a lehetőséget.

Az analízis bizonyos eredményei biztosítják a fenti számolás jogosságát. Egyrészt igaz az, hogy ha egy $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor konvergens egy $(-A, A)$ intervallumban, és a $h(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ összeg konvergens, akkor $\lim\limits_{x \to A} h(x) = h(A)$. Másrészt, ha a $h(x)$ Taylor-sor a_k együtthatói nem negatívak, akkor $\lim\limits_{x\to A} h(x) = h(A)$. Speciálisan, ha ebben az esetben $\lim\limits_{x\to A} h(x) < \infty$ akkor $h(A) < \infty$. Ezeknek az eredményeknek az alkalmazásával $A = 1$ és $h(x) = g'(x)$ illetve $h(x) = g''(x)$ választással meg lehet mutatni a fenti számolások jogosságát. Érdemes megjegyezni, hogy az általános esetben a $g'(1) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x)$, $g''(1) = \lim\limits_{x\to 1} g''(x)$ képletet kell alkamaznunk annak érdekében, hogy a $g'(1)$ és $g''(1)$ számokat értelmezni tudjuk.

Megjegyzés: Az, hogy egy hatványsor hogyan viselkedik a kovergenciakörének szélén, a komplex függvénytan egyik nehéz és fontos kérdése. Annak érdekében, hogy lássunk egy egyszerű példát, amely rávilágíthat arra, hogy vigyázni kell a formális számolások során, tekintsük az $h(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ hatványsort. Ekkor $h(x)$ konvergens a $-1 < x < 1$ intervallumban, $h(1) = \dfrac{1}{2}$, és $h(x)$ hatványsora az $x = 1$ pontban, a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ sor, divergens. Ez a példa azért nem mond ellen a fent elmondottaknak, mert ebben a hatványsorban vannak negatív együtthatók is.

Feladat:

Lássuk be, hogy amennyiben egy ξ valószínűségi változó generátorfüggvénye valamely $g(x)$ függvény, akkor $E\xi = g'(1)$, $\mathrm{Var}\,\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$, ahol az általános esetben a $g'(1) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x)$ és $g''(1) = \lim\limits_{x\to 1} g''(x)$ képletek definiálják ezeket a mennyiségeket. Számoljuk ki egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, felhasználva, hogy e valószínűségi változó generátorfüggvénye a $\left(\dfrac{px}{1-(1-p)x}\right)^r$ függvény.

Feladat:

Mutassunk példát olyan $\mathcal{P} = \{p_k : k = 1, 2, \dots\}$, $p_k \ge 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, valószínűség eloszlára a nem negatív egész számokon, amelynek $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ generátorfüggvénye semmilyen $\varepsilon > 0$ szám esetén nem konvergens a $-1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$ intervallumon.

Feladat:

Legyen ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Lássuk be, hogy ξ teljesíti a következő (diszkrét) örökifjú tulajdonságot.

$$P(\xi = k + l | \xi > l) = p(1-p)^{k-1} = P(\xi = k).$$

Adjuk meg ennek az azonosságnak a valószínűségszámítási magyarázatát is.

b.) *Hipergeometrikus eloszlás.*

Tekintsünk először egy tipikus példát, amelyben ilyen eloszlások megjelennek.

Adva van egy urnában M piros és $N-M$ fehér golyó. Visszatevés nélkül kihúzunk n, $n \le N$ golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy k piros golyót húztunk ki?

Ez a valószínűség $\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Valóban, ha megkülönböztetjük az egyes golyókat, akkor $\binom{N}{n}$ különböző húzáseredmény alakulhat ki. (Nem különböztetünk meg két húzáseredményt, ha ugyanazokat a golyókat húztuk ki csak más sorrendben. Kissé részletesebben kifejtve: Az urnában levő golyókat számozzuk meg 1-től N-ig úgy, hogy a piros golyók kapják az $1,\dots,M$ és a fehér golyók az $M+1,\dots,N$ számokat. Egy n hosszúságú visszatevés nélküli húzássorozat eredménye egy az $1,\dots,N$ számokból álló n hosszú számsorozat, amelynek minden tagja különböző. A különböző húzássorozatok számát számoljuk ki, ha azonosítunk két olyan sorozatot, amelyben ugyanazok a számok szerepelnek csak más sorrendben. Ezután azon n hosszúságú húzássorozatok számát számoljuk össze, amelyekben k piros, azaz az $1,\dots,M$ számok valamelyikével indexezett golyó van.) Olyan húzássorozat, amelyben az M piros golyóból k-t, az $N-M$ fehér golyóból pedig $n-k$-t húzunk $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ van. Mivel ezek azok az n hosszú húzássorozatok, amelyekben pontosan k piros golyót húzunk, és az egyes húzássorozatok valószínűsége megegyezik, innen következik az állítás.

A hipergeometrikus eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású N, M és n paraméterekkel, ahol N, M és n nem negatív egész számok, $M < N$, $n < N$, ha*

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le k \le n.$$

Ilyen módon valóban eloszlást definiáltunk. A $\sum\limits_{k=0}^{n} P(\xi = k) = 1$ azonossággal ekvivalens $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}$ azonosságot (más jelöléssel) beláttuk a binomiális eloszlás vizsgálatában.

Feladat:

Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a lottóban pontosan három találatunk lesz.

Számoljuk ki egy hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Feladat:

Számoljuk ki egy N, M és n paraméterű hipergeometrikus eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, azaz egy olyan valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, amelyre

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le k \le n.$$

Mutassuk meg, hogy $E\xi = n\frac{M}{N}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{n-n}{N-1}$.

Segítség: Tekintsünk egy urnamodellt, amelyben ξ jelöli azt, hogy N piros és $N-M$ fehér golyóból n visszatevés nélküli húzásban hány piros golyót húzunk. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér, $1 \le j \le n$. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Hogyan kell ezt csinálni? Emlékezzünk arra, hogy mint korábban megmutattuk, ebben a modellben annak a valószínűsége, hogy valamely húzás(ok)ban piros golyót húzunk nem függ attól, hogy hanyadik húzást tekintettük.

Ha egy urnahúzásban N és $N-M$ nagy, azaz sok fehér és piros golyó van az urnában, és fix számú golyót kihúzunk, akkor a húzáseredmény szempontjából alig van jelentősége annak, hogy a kihúzott golyókat visszadobjuk-e vagy sem. Ilyen jellegű állítást fogalmaz meg a következő (egyszerű) feladat.

Feladat:

Ha $N \to \infty$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{M}{N} = p$, $0 < p < 1$, n rögzített egész szám, akkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{minden } 0 \le k \le n \text{ számra.}$$

A hipergeometrikus eloszlás természetes általánosítása a polihipergeometrikus eloszlás. Ennek megértése érdekében tekintsük a következő feladatot: Egy urnában r különböző színű golyó van, N_1 1-es, N_2 2-es, … N_r r-es színű golyó. Legyen $N = \sum\limits_{j=1}^{r} N_j$.

Ezekből a golyókból kihúzunk n-et visszatevés nélkül. Mi annak a valószínűsége, hogy k_1 1-es, k_2 2-es, … k_r r-es színű golyót húzunk ki?

A válasz:

$$\frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}},$$

ahol $n=\sum\limits_{j=1}^{r} k_r$. Ennek az állításnak a bizonyítása hasonlóan történhet mint a hipergeometrikus eloszlás bevezetése előtt tekintett feladaté. Ennek a feladatnak az alapján vezették be a következő fogalmat.

A polihipergeometrikus eloszlás definiciója. *Azt mondjuk, hogy a* $(\xi_1,\dots,\xi_r)$ *véletlen vektor polihipergeometrikus eloszlású* $N_1,\dots N_r$ *és* n *paraméterekkel, ahol* N_j*,* $1\le j\le r$*, és* n *nem negatív egész számok, és* $N=\sum\limits_{j=1}^{r} N_j$ *jelöléssel* $n<N$*, ha*

$$P(\xi_1=k_1,\dots,\xi_r=k_r)=\frac{\binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}\cdots\binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}},$$

ahol $n=\sum\limits_{j=1}^{r} k_j$*.*

Feladat:

Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_L$ és $\eta_1,\dots,\eta_M$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy

$$\operatorname{Cov}\left(\sum_{j=1}^{L}\xi_j,\sum_{k=1}^{M}\eta_k\right)=\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{M}\operatorname{Cov}(\xi_j,\eta_k).$$

Feladat:

Legyen $(\xi_1,\dots,\xi_r)$ véletlen vektor polihipergeometrikus eloszlású $N_1,\dots N_r$ és n paraméterekkel. Számítsuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, a $\operatorname{Var}\xi_j$ szórásnégyzetet minden $1\le j\le r$ számra és a $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)$ kovarianciafüggvényt, ha $1\le j,k\le r$, $j\ne k$.

Segítség: A hipergeometrikus eloszlásról szóló hasonló feladat módszere természetes módon adaptálható ebben az esetben is.

d.) *Poisson eloszlás.*

A Poisson eloszlást közvetlenül fogjuk definiálni. Azok a tulajdonságai, amelyek miatt fontos szerepet játszik a valószínűségszámításban később fognak kiderülni.

Poisson eloszlás definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha ξ nem negatív egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ez valóban valószínűség eloszlás, mert

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Számítsuk ki egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvényét. Ez

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$$

A következő állítást fontossága miatt fogalmazzuk meg Tétel formájában.

Tétel *Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.*

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j) P(\eta = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{(k-j)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k.
\end{aligned}$$

Feladat:

Mutassuk meg, hogy a Poisson eloszlás generátorfüggvényének alakjából látható, hogy ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

A fenti eredmény következménye, hogy amennyiben véges sok független, Poisson eloszlású valószínűségi valószínűségi változónak vesszük az összegét, az ismét Poisson eloszlású lesz, amelynek paramétere az egyes valószínűségi változók paramétereinek az összege. A következő feladat állítása, amelynek érdekes következményei vannak, tekinthető úgy mint ennak az állításnak a megfordítása. Abban ugyanis egy alkalmas konstrukció segítségével egy Poisson eloszlású valószínűségi változót bontunk fel független kisebb paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók összegére.

Feladat:

Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j = 1, \dots, k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.

Lássuk be az előző feladat segítségével a következő állítást:

Feladat:

Legyen adva ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Dobjunk le egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül véletlenül egyenletesen ξ darab pontot az egységintervallumra, azaz tegyük fel, hogy minden pont $b - a$ valószínűséggel esik valamely $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba. Ekkor a $[0, 1]$ intervallum tetszőleges felbontására $[s_0, s_1]$, $[s_1, s_2]$, ... , $[s_{k-1}, s_k]$ intervallumokra, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$, az egyes intervallumokba eső pontok száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel.

Számítsuk ki egy ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda + \lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

és $\operatorname{Var} \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$.

Jegyezzük meg, hogy a Poisson eloszlás várható értékére és szórásnégyzetre kapott eredmények összhangban vannak azzal a ténnyel, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege olyan Poisson eloszlású valószínűségi változó, amelynek paramétere az összeadandók paramétereinek az összege. Ugyanis mind a várható érték mind a szórásnégyzet additív független valószínűségi változók összegzése esetén.

Feladat:

Legyenek ξ_j, $j = 1, \dots, r$, független Poisson eloszlású valószínűségi változók λ_j, $1 \le j \le r$, paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^{r} \xi_j = n\right) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left(\sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s\right)^{k_j}},$$

ha $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$. Azaz a $\xi_1, \dots, \xi_r$ vektor feltételes eloszlása feltéve, hogy $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$ a polinomiális eloszlás n és $p_j = \dfrac{\lambda_j}{\sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s}$, $1 \le j \le r$, paraméterekkel.

Lemma. *Minden $n = 1, 2, \dots$ számra tekintsünk egy S_n binomiális eloszlású valószínűségi változót $B(n, p_n)$ eloszlással, azaz n és p_n paraméterekkel. Tegyük fel továbbá, hogy a $\lambda_n = np_n$, $n = 1, 2, \dots,$ számok teljesítik a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ feltételt valamilyen $\lambda > 0$ számmal. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda_k}{k!} e^{-\lambda}$$

minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra.

Bizonyítás:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^{k} =$$
$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ha $n \to \infty$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra, mert $\dfrac{\lambda_n^k}{k!} \to \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\left(1 - \dfrac{\lambda_n}{n}\right)^{n} \to e^{-\lambda}$, $\left(1 - \dfrac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \to 1$, és $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \to 1$, ha $n \to \infty$.