A február 11.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót. Minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik ugyanolyan színű golyóval. Lássuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a 3. és 7. húzáskor piros golyót húzunk megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és második húzáskor piros golyót húzunk.

   Teintsünk egy olyan 25 hosszúságú húzássorozatot, amely k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz. Vegyük észre, hogy egy ilyen sorozat p_k valószínűsége csak a k számtól függ, de nem függ attól, hogy mely helyeken vannak a piros húzások. Valóban,

$$p_k = \frac{20(20+1)\cdots(20+k-1)30(30+1)\cdots(30+(25-k)-1)}{50(50+1)\cdots(50+25-1)}$$

   Jelőlje, $A(k)$ azon 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, és az 1. és 2. húzás piros; $B(k)$ azon 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, és a 3. és 7. húzás piros. Ekkor a két vizsgált valószínűség a $\sum\limits_k A(k)p_k$, illetve $\sum\limits_k B(k)p_k$ kifejezéssel egyenlő. Ezért a feladat megoldásához elég belátni, hogy $A(k)=B(k)$ minden k számra is. Ez valóban igaz, mert $A(k)=B(k)=\binom{23}{k-2}$.

   Házi feladat:

   Egy urnában 10 fehér és 10 piros golyó van. Kihúzunk 15 golyót úgy, hogy amikor kihúzunk egy golyót azt visszadobjuk, és vele együtt az urnába dobunk három ugyanolyan színű golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy a negyedik, ötödik és tízenkettedik húzás mindegyike piros?

2. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 10 000 alkalommal. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 5000 fej és 5000 írás dobás lesz? Adjunk a kapott valószínűségre jó közelítő becslést a Stirling formula segítségével.

   Megjegyzés: A Stirling formula az $n!$ kifejezésre ad jó becslést nagy pozitív egész számokra. E formula szerint $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

   Megoldás: Egy szabályos pénzdarab 10 000-szeri feldobása esetén minden lehetséges 10 000 hosszú fej-írás sorozat valószínűsége $2^{-10\,000}$. Összesen $\binom{10\,000}{5000}$ olyan fej-írás sorozat van, amelyik 5000 fej és 5000 írás jelet tartalmaz. Ezért a keresett valószínűség $\binom{10\,000}{5000}2^{-10\,000}$.

A Stirling formula alapján $\binom{10\ 000}{5000} = \frac{10\ 000!}{(5000!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi 10\ 000}\left(\frac{10\ 000}{e}\right)^{10\ 000}}{\left(\sqrt{2\pi 5000}\left(\frac{5000}{e}\right)^{5000}\right)^2}$,

ahonnan $\binom{10\ 000}{5000} \sim \frac{1}{\sqrt{5000\pi}} 2^{10\ 000}$. Ezért a keresett valószínűség körülbelül $\frac{\sqrt{2}}{100\sqrt{\pi}} \sim 0.008$.

3. Egy pénzdarabot feldobunnk 10-szer egymás után. Jelölje A_j azt az eseményt, (halmazt) hogy a j-ik dobás eredménye fej, $1 \le j \le 10$. Tekintsük e dobássorozat egy természetes valószínűségi modelljét. Hogyan értelmezhetjük az A_j eseményt mint halmazt? Fejezzük ki az A_j események segítségével, unió, metszet és halmaz komplementerképzés műveletét használva azt a B eseményt, hogy legalább három fejdobás történt. Fejezzük ki a fenti eseményt úgy is, hogy csak diszjunkt halmazok unióját tekintjük.

   (Beszéljük meg röviden az utolsó formula kapcsolatát a más matematikai tantárgyban már tanult logikai formák konjunktiv normálformjával.)

   Megoldás: Az az esemény, hogy a j_1-ik, j_2-ik és j_3-ik dobás eredménye fej, $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap Aj_3$. Az, hogy legalább három fejdobás történt, azt jelenti, hogy léteznek ilyen $1 \le j_1 \le j_2 \le j_3$ indexek. Ezért a kifejezendő B esemény

$$B = \bigcup_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ 1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le 10}} A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap Aj_3.$$

   Az unióban szereplő kifejezések nem diszjunktak. De átírhatjuk a kívánt formáan, ha úgy írjuk fel a keresett eseményt, hogy bizonyos $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s$ indexekre, $s \ge 3$, a dobás eredménye fej, a többi dobás eredménye írás. Ezért

$$B = \bigcup_{s=3}^{10} \bigcup_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_s \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots j_s \le 10}} \left(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap Aj_s \cap \bigcap_{l \in \{1, \cdots, 10\} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}} \bar{A}_l \right),$$

   ahol $\bar{A}$ jelöli az A esemény (halmaz) komplementerét.

   Házi feladat:

   Definiáljunk olyan valószínűségi mezőt, amelyben lehet vizsgálni egy szabályos dobókocka öt egymásutáni dobásának az eredményét.

4. Egy pénzdarabot feldobunnk végtelen sokszor egymás után. Jelölje A_j azt az eseményt, (halmazt) hogy a j-ik dobás eredménye fej, $1 \le j < \infty$. Fejezzük ki az A_j események segítségével, unió, metszet és halmaz komplementerképzés műveletét

használva azt a D eseményt, hogy az első n dobásban történt fejdobások számának limesz szuperiora nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{2}{3}$, ha $n \to \infty$. Fejezzük ki ezt az eseményt az A_j események segítségével úgy is, hogy csak megszámlálható sok halmaz metszetét és unióját szabad vennünk. Beszéljük meg, hogy ez a feladat kapcsolatban van a következő kérdéssel: Ha az A_j események, (tehát azok az események, hogy egy végtelen pénzdobás egyes eredményei fej dobások) benne vannak valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező $\mathcal{A}$ σ-algebrájában, akkor az az esemény, hogy a dobásszámok limesz superiora nagyobb vagy egyenlő mint $\dfrac{2}{3}$ szintén benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrában, tehát van értelme ezen esemény valószínűségéről beszélni.

Megoldás: Jelölje $C(k,n)$, $0 \le k \le n$, azt az eseményt, hogy az első n dobásban legalább k fejdobás történt. Ekkor

$$C(k,n) = \bigcup_{\substack{j_1, j_2, \cdots, j_k \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n}} A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots Aj_k.$$

Tekintsünk egy $0 \le < \alpha \le 1$ számot, és definiáljuk azokat a $D(n,\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$, és $D(\alpha)$ eseményeket, amelyek azt jelölik, hogy rögzített n számra van olyan, $N > n$ szám melyre az első N dobásban legalább $[\alpha N]$ fejdobás történt, illetve akármilyen nagy n számra létezik olyan $N > n$ szám, melyre legalább $N\alpha$ fejdobás történt. Itt $[x]$ az x szám egész részét jelöli, azaz a legnagyobb az x számnál kisebb egész számot. Ekkor

$$D(n,\alpha) = \bigcup_{N=n}^{\infty} C([\alpha N], N),$$

$$D(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(n,\alpha).$$

Az az esemény, hogy a limesz szuperior nagyobb vagy egyenlő mint a $\dfrac{2}{3}$ szám megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a $D(\alpha)$ esemény bekövetkezik minden $\alpha < \dfrac{2}{3}$ számra. Ezért

$$D = \bigcap_{\alpha < \frac{2}{3}} D(\alpha).$$

Az utolsó kifejezésben kontinum sok (egymásba skatulyázott) esemény metszetét vettük. Viszont ugyanezt a D eseményt kapjuk, ha csak $\alpha = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{n}$, $n \ge 2$ alakú halmazokra vesszük a metszetet. Ezért

$$D = \bigcap_{n=2}^{\infty} D\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n}\right),$$

és ez a kívánt tulajdonságú előállítása a D halmaznak.

5. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

   Megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x, y) pont az egységnégyzet

$$A = \left\{(x, y)\colon\ -\frac{1}{2} \le y - x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1] \times [0,1]$$

   részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1 - 2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

6. Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

   Megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x, y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ uniójába esik: $A_1 = \{(x, y)\colon x + y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_2 = \{(x, y)\colon x + (1 - y) < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_3 = \{(x, y)\colon 1 - x + y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$ és $A_4 = \{(x, y)\colon 1 - x + 1 - y < 0.8\} \cap [0,1] \times [0,1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet melynek csúcsai a (0.3, 0.5), (0.5, 0,3), (0.7, 0.5), és (0.5, 0.7) pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1 - 0.08 = 0.92$.

7. Egy szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatát leírja egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra tartalmazza az A_j eseményeket, melyek azt jelölik, hogy a j-ik dobás fej, $1 \le j < \infty$. Lássuk be, hogy az a B esemény, hogy az első n dobásban levő fejdobások számának $\alpha(n)$ relatív gyakoriságának létezik limesze, ha $n \to \infty$, és az $\dfrac{1}{2}$ benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrb́an.

   Megoldás: Lássuk be először, hogy minden $n = 1, 2 \ldots$, pozitív egész számra és $\varepsilon > 0$ számra azon $C(n, \varepsilon)$ esemény, hogy a fej-dobások számának relatív gyakorisága a $\left[\dfrac{1}{2} - \varepsilon, \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right]$ intervallumba esik minden $N \ge n$ számra benne van az $\mathcal{A}$ σ-

algebrában. Valóban,

$$C(n,\varepsilon)=\bigcap_{N=n}^{\infty}\left(\bigcup_{N(\frac{1}{2}-\varepsilon)\le l\le N(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\right.$$
$$\left.\bigcup_{\{j_1,\dots,j_l\}\subset\{1,\dots,N\}}\left((A_{j_1}\cap\dots\cap A_{j_l})\cap\bigcap_{s\in\{1,\dots,N\}\setminus\{j_1,\dots,j_l\}}\bar{A}_s\right)\right)\in\mathcal{A}.$$

Ezután láthatjuk, hogy minden $\varepsilon>0$ számra az a $C(\varepsilon)$ esemény, hogy létezik olyan n index, melyre a fej-dobások számának relatív gyakorisága a $\left[\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon\right]$ intervallumba esik minden $N\ge n$ számra benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrában. Ugyanis,

$$C(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}C(n,\varepsilon)\in\mathcal{A}.$$

Ezért a minket érdeklő C eseményre kapjuk felhasználva a fenti összefüggést minden $\varepsilon=\frac{1}{k}$ számra, $k=1,2,\dots$, hogy a minket érdeklő B eseményre

$$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}C\left(\frac{1}{k}\right)\in\mathcal{A},$$

amint állítottuk.

8. Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az utolsóelőtti dobás eredménye fej?

   Megoldás: Az esemény, amelyiknek a valószínűségét ki akarjuk számolni, a következő módon is jellemezhető: Először k darab írásdobás történik valamely $k=0,1,2,\dots$, számmal, majd utána két fejüdobás következik be. Ennek valószínűsége

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Házi feladat:

Egy szabályos érmét feldobunk egymás után egészen addig, amíg másodszor megjelenik egy fej. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább három dobást végzünk, és az utolsót kettővel megelőző dobás eredménye fej?