A február 25-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1.) Két különböző fáról leszednek 100 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen) ládába. Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik (véletlenül kiválasztott) ládából két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik ládáól egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Megoldás: Értsük meg először pontosabban a feladatot. Jelölje B azt az eseményt, hogy első alkalommal a rosszabb fáról leszedett almákat tartalmazó ládához nyúlunk. Ekkor egyrészt $P(B) = \frac{1}{2}$. Másrészt, ha egymás után, esetleg váltogatva a ládákat kiveszünk egymás után a ládákból almákat, definiáljuk a $j_1, \dots, j_k$ húzássorozatot, ahol mindegyik $j_s = \pm 1$, $j_1 = 1$, $j_s = 1$ azt jelenti, hogy a s-ik húzás során az elsőnek kiválasztott ládából, $j_s = -1$ pedig azt, hogy a másik ládából választottunk almát, akkor $A(j_1, \dots, j_n)$-nel jelölve azt az eseményt, hogy minden kiválasztott alma férges, felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(A(j_1, \dots, j_n)|B) &= \left(\frac{1}{4}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)}, \\ P(A(j_1, \dots, j_n)|\bar{B}) &= \left(\frac{1}{10}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)}, \end{aligned}$$

ahol $u(j_1, \dots, j_n)$ jelöli a $j_1, \dots, j_n$ sorozatban szereplő $+1$ jelek számát. Hasonlóan fel tudjuk írni annak feltételes valószínűségét, hogy egy előírt húzássorozat esetén, amelyikben megmondjuk, hogy mikor melyik ládából húztunk almát a férges és jó almahúzásoknak előírt sorozata jelenik meg, feltéve a B eseményt vagy annak komplementerét, a $\bar{B}$ eseményt. Jelölje C azt az eseményt, hogy az első két húzásban férges almát hízunk, D pedig azt, hogy a harmadik húzásban (a láda megváltoztatása után) jó almát hízunk. Ekkor a $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámolni. Viszont,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = \frac{29}{800},$$

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C \cap D|B)P(B) + P(C \cap D|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{9}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{3}{4}\right) = \frac{51}{1600}. \end{aligned}$$

Innen $P(D|C) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{51}{58}$.

2. Legyenek $A_1, A_2, \ldots,$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ jelöli azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \ldots,$ események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

   Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, amelyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény.

3. Ha egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor feldobunk egymás után, akkor egy valószínűséggel lesz legalább 50 fejdobás.

   Egy lehetséges megoldás: Az is igaz egy valószínűséggel, hogy a

   $$B_k = \{\text{azon } j \text{ indexekre, amelyekre } 50k \leq j < 50(k+1) \text{ minden dobás fej}\}$$

   események közül végtelen sok fog bekövetkezni. Ugyanis ezek a B_k események függetlenek, $P(B_k) = 2^{-50}$, tehát $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \infty$. Ezért a Borel–Cantelli lemmából következik a kívánt állítás, sőt az is, hogy végtelen sok B_k esemény következik be egy valószínűséggel. Valójában a Borel–Cantelli lemmára nincs is szükség. Annak valószínűsége, hogy egyik B_k esemény sem következik be $\lim\limits_{N \to \infty} \left(1 - 2^{-50}\right)^N = 0$, tehát egy valószínűséggel valamelyik B_k esemény bekövetkezik.

   Hogyan lehet egyszerűen látni a Borel–Cantelli lemma nélkül, hogy végtelen sok B_k esemény bekövetkezik egy valószínűséggel? *Segítség:* Elég belátni, hogy bármilyen L számra egy valószínűséggel legalább L B_k esemény bekövetkezik. Viszont az előző érveléshez hasonlóan, annak valószínűsége, hogy van egy legalább $50L$ hosszú tiszta fejdobás sorozat egy valószínűséggel. (Jegyezzük meg, hogy ebben az érvelésben kihasználtuk, hogy megszámlálható sok egy valószínűségű halmaz metszete is egy valószínűségű.)

4. Egy kaszinóban azt játsszák, hogy egymás után feldobnak egy szabályos pénzdarabot, és akinek a kaszinóban való tartozkódása alatt csupa fej-dobás történt, az nyer, akinek ott tartozkódása alatt történt írás dobás is az veszít. Végtelen sok ember egymást felváltva betér a kaszinóba, és ott megfigyel A_n pénzdobást. Lássuk be, hogy amennyiben $A_n = [\log n]$, ahol log kettes alapú logaritmust jelöl, $[x]$ pedig a legnagyobb x-nél kisebb egész szám, akkor egy valószínűséggel végtelen sok ember távozik nyertesen. Ha $A_n = \left[\frac{101}{100} \log n\right]$, akkor egy valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen. Mi a helyzet, ha $A_n = [\log n + \log\log n]$, és ha $A_n = \left[\log n + \frac{101}{100} \log\log n\right]$?

Megoldás: Az egyes emberek egymástól függetlenül távoznak nyertesen vagy vesztesen a kaszinóból, és annak valószínűsége, hogy az n-ik ember nyertesen távozik 2^{-A_n}. A Borel–Cantelli lemma miatt egy valószínűséggel távozik végtelen sok ember nyertesen, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} = \infty$, és egy valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} < \infty$. Ha $A_n = [\log n]$, akkor $\frac{1}{n} \le 2^{-A_n} \le \frac{2}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} = \infty$. Hasonlóan $A_n = \left[\frac{101}{100} \log n\right]$ esetében $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} < \infty$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{101/100}} < \infty$ reláció miatt. Végül $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} = \infty$, ha $A_n = [\log n + \log\log n]$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-A_n} < \infty$, ha $A_n = \left[\log n + \frac{101}{100} \log\log n\right]$, a $\sum\limits_n \frac{1}{n \log n} = \infty$, és $\sum\limits_n \frac{1}{n(\log n)^{101/100}} < \infty$ relációk miatt.

5. Lássunk példát arra, hogy a Borel–Cantelli lemma azon felében, amikor teljesül a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ reláció, a függetlenség feltétele nem hagyható el. Mutassunk példát $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre, azon $A_1, A_2, \dots,$ eseményekre, amelyekre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, és

   a) Annak valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be $\frac{1}{2}$.

   b) Annak valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be 0.

   Megoldás: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ az $\Omega = [0, 1]$ intervallum, azon $\mathcal{A}$ a Borel mérhető halmazok σ-algebrája, és P a Lebesgue mérték. Az a) esetre példa az, ha $A_n = [0, \frac{1}{2}]$ minden n-re. Ekkor végtelen sok A_n következik be egy $x \in \Omega$ pontban akkor és csak akkor, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és ennek valószínűsége $\frac{1}{2}$. A b) esetre példa, ha $A_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor ugyanis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, és minden $x \in \Omega$ pontra csak véges sok olyan n index van, amelyre $x \in A_n$. Ugyanis minden $x > 0$ számhoz létezik olyan n_0, index, amelyre $x > \frac{1}{n}$, ha $n \ge n_0$, és $x \notin A_n$, ha $n \ge n_0$.

6. Adjunk példát egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, amelyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.

   Egy lehetséges konstrukció: Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$, $P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $A_3 = \{1, 4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x + y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x + y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$, továbbá $P(\{5\}) = \dfrac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyílván $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

6′. Adjunk példát minden $N > 2$ szám esetén egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon N $A_1, \dots, A_N$, eseményre, amelyekre

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_N),$$

de az A_1, A_2, ... , A_N események nem függetlenek.

Az előző konstrukció módosítása: Legyen $\Omega = \{1, 2, \dots, N+2\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{j\}) = y$, ha $2 \le j \le N+1$, $P(\{N+2\}) = 1 - x - Ny$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_j = \{1, j+1\}$, $1 \le j \le N$, halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = x$. Másrészt $P(A_j) = x + y$, $1 \le j \le N$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x+y)^N$. Egy lehetőség erre, $x + y = \dfrac{1}{N}$, és ekkor $x = (x+y)^N = \dfrac{1}{N}$, $y = \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{N^N}$, továbbá $P(\{N+2\}) = 1 - x - Ny = \dfrac{N-1}{N^N}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_N)$. Viszont az A_1, ... A_N, események nem függetlenek.

7. Lássunk példát arra is, hogy események páronkénti függetlenségéből nem következik azok függetlensége, azaz definiálunk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, azon három A_1, A_2, A_3-mal jelölt eseményt, amelyek páronként függetlenek, azaz $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, de nem teljesül a $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosság, tehát ezek az események nem függetlenek.

Megoldás: Álljon az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben Ω 4 pontból, a jobb szemlélhetőség kedvéért legyenek ezek az $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ pontok, álljon $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazából, és legyen $P(\{(1,1)\}) = P(\{(1,2)\}) = P(\{(2,1)\}) = P(\{(2,2)\}) = \dfrac{1}{4}$. Tekintsük az $A_1 = \{(1,1), (1,2)\}$ $A_2 = \{(1,1), (2,1)\}$ és $A_3 = \{(1,1), (2,2)\}$ halmazokat. Ekkor teljesülnek a $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ és $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ azonosságok, mert $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{2}$, és mivel $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \{(1,1)\}$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{4}$. Másrészt, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, mert $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{(1,1)\}) = \dfrac{1}{4}$, és $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \dfrac{1}{8}$.

8. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk $n \ge 5$ alkalommal. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 5 fejdobás történik? Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos pénzdarab végtelen sok dobása során legfeljebb 5 fejdobás történik? Tekintsük ennek az utóbbi feladatnak egy valószínűségi modelljét és beszéljük meg a következő két tulajdonság kapcsolatát:

a. Egy A esemény nem következhet be.

b. Egy A esemény nulla valószínűséggel következik be.

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy szabályos pénzdarab n egymástól független dobása során pontosan j darab fejdobás történik $\binom{n}{j}2^{-n}$, mert összesen $\binom{n}{j}$ ilyen dobássorozat van, és mindegyik dobássorozat valószínűsége 2^{-n}. Így annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 fejdobás történik $\sum_{j=0}^{5}\binom{n}{j}2^{-n}$. Annak a valószínűsége, hogy végtelen dobássorozat esetén legfeljebb 5 fejdobás történik $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{5}\binom{n}{j}2^{-n}=0$. Miért szabad határértéket venni? Megbeszélendő, hogy felhasználtuk a valószínűségi mérték folytonossági tulajdonságát, amely a valószínűség σ-additivitásából következik.

9. Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j)=\frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap_{j=1}^{1000}(\Omega\setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega\setminus A_j)=1-\frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega\setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap_{j=1}^{1000}(\Omega\setminus A_j)\right)=\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1-\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}$.

Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}=\left(\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10}\sim e^{-1/10}$. Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

10. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega=\{1,\dots,n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A)=\frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

Legyen $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j=\{m\colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1\le j\le k$. Legyen $B=\{m\colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

a. Az $A_1, \dots, A_k$ események függetlenek.

b. $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j} p_j\right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, ... A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \backslash (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} (\Omega \backslash A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod\limits_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

Az elöző két feladatban láttuk hogyan lehet egyszerűen kiszámítani a $A_1 \cup \dots \cup A_n$ alakú események valószínűségét, ha az A_j, $1 \le j \le n$, események függetlenek. Ezek a számolások természetesen kihasználták a tekintett események függetlenségét. A következőben azt tárgyaljuk meg, hogy amennyiben nincs feltétlenül függetlenség a tekintett események között, de ki tudjuk számolni az $A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_s}$ alakú események valószínűségét, akkor egy úgynevezett szita formula segítségével ki tudjuk számítani az $A_1 \cup \dots \cup A_n$ események valószínűségét is. Továbbá megmutatjuk, hogy ez lehetővé teszi érdekes feladatok megoldását. A következő feladatot fogjuk tárgyalni:

11. Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Mi a valószínűsége annak, hogy egyetlen házaspár sem táncol együtt? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke, ha $n \to \infty$?

Megoldás: Definiáljuk a következő A_j eseményeket:

$$A_j = \text{a } j\text{-ik házaspár egütt táncol}, \quad 1 \le j \le n.$$

Ekkor minket a $P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűség érdekel. Vegyük észre, hogy a $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$ azonosság igaz. Ugyanis az összes lehetséges párbaállítások száma $n!$, míg az olyan párbaállítások száma, amelyben a j_1-ik, j_2-ik, ... , j_k-ik házaspár egy párba kerül $(n-k)!$. Továbbá érvényes a következő az irodalomban szita-formulának nevezett eredmény, amely szerepelt az előadáson is.

Szita formula. *Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

A szita-formula segítségével kapjuk, hogy n házaspár esetében

$$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Innen adódik, hogy a minket érdeklő valószínűség n házaspár esetén

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \end{aligned}$$

és ezért

$$P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e} \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Kiegészítés a 11. feladathoz

Az előző feladatban rejtélyesnek tűnhet az, hogy miért éppen az e^{-1} szám jelenik meg a vizsgált valószínűség limeszeként. A következő állítás, amelyet bizonyos általánosabb, de jól ismert eredmény segítségével bizonyítunk természetesebbé teheti ezt az eredményt.

Proposition. *Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Jelölje ξ_n azon házaspárok számát, amelynek tagjai együtt táncolnak. A ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak az egy paraméterű Poisson eloszláshoz, azaz $\lim_{n\to\infty} P(\xi_n = k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots,$ számra.*

A fenti állítás bizonyításának érdekében először belátjuk a következő lemmát.

Lemma *Legyen ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ekkor minden $k = 0, 1, 2, \ldots,$ számra $E\binom{\xi}{k} = \frac{\lambda^k}{k!}$. Ezért, ha ξ_n, $n = 1, 2, \ldots,$ valószínűségi változók sorozata teljesíti a $\lim_{n\to\infty} E\binom{\xi_n}{k} = \frac{\lambda^k}{k!}$ feltételt minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ számra, akkor a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz.*

A Lemma bizonyítása. Ha ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, akkor

$$E\binom{\xi}{k}=\sum_{l=k}^{\infty}\binom{l}{k}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{\lambda^{l-k}}{(l-k)!}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda}=\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ha ξ_n valószínűségi változók sorozata teljesíti a $\lim\limits_{n\to\infty}E\binom{\xi_n}{k}=E\binom{\xi}{k}$ azonosságot minden $k=0,1,2,\dots,$ számra valamely ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változóval, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}E\xi_n^k=E\xi^k$, $k=0,1,2,\dots$. Innen viszont a valószínűségszámítás általános eredményei alapján következik a Lemma második állítása.

A Proposition bizonyítása. A Lemma alapján elég megmutatni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}E\binom{\xi_n}{k}=\frac{1}{k!}$. Viszont, ha $A(j_1,\dots,j_k)$-val jelöljük annak valószínűségét, hogy a j_1-ik, j_2-ik, … j_k-ik házaspár együtt táncol, akkor $P(A(j_1,\dots,j_k))=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$, ahonnan minden $n\ge k$ számra

$$E\binom{\xi_n}{k}=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}P(A(j_1,\dots,j_k))=\binom{n}{k}\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{k!}.$$

Innen következik a Proposition állítása.

Megjegyzés: A Proposition állítása a következő módon is megfogalmazható: Legyen adva n urna és n golyó, és számozzuk meg mind a golyókat mind az urnákat az $1,\dots,n$ számokkal. Dobjuk be a golyókat az urnákba egymás után úgy, hogy az egymás utáni dobásokban csak az üres urnákba dobhatunk golyót, és minden üres urnába egyforma valószínűséggel. Tekntsük azon golyók számát, amelyeknek számozása megegyezik az őt tartalmazó urna számozásával. Akkor ezek (az n paramétertől függő) valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak az 1 paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $n\to\infty$. Hasonlítsuk össze e feladat eredményét a probléma azon változatával, ahol az egyes golyókat egymástól függetlenül dobjuk le, és mindegyik urnába egyforma, $\frac{1}{n}$, valószínűséggel esnek az egyes golyók. Ekkor is vizsgáljuk azon golyók számát, amelyeknek számozása megegyezik az őt tartalmazó urna számozásával. Ebben a feladatban is igaz, hogy az ilyen golyók számának eloszlása $n\to\infty$ esetén tart az 1 paraméterű Poisson eloszláshoz. Sőt ez az állítás speciális esete azon általános eredménynek, amelyik leírja, hogy független egész értékű valószínűségi változók összege mikor konvergál a Poisson eloszláshoz. A kimondott Proposition tehát olyan jellegű tétel, amely szerint gyengén függő valószínűségi változók összege alkalmas feltételek mellett hasonlóan viselkedik független valószínűségi változók összegéhez. E hasonló viselkedést meg lehet magyarázni annak a ténynek az alapján, hogy a bizonyításban szereplő $A(j_1,\dots,j_k)$ események valószínűsége nagyon közel van egymáshoz a két tekintett feladatban.