A január 30-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Feladatok:

1. Egy pénzdarabot feldobunk kétszer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás lesz?
   Megoldás: A dobások lehetséges kimenete, (F, F), (F, I), (I, F) és (I, I). Ezen lehetséges kimenetelek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás, azaz az (F, I) vagy (I, F) dobássorozat következik be $\frac{1}{2}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás, azaz az (F, F), (F, I) vagy (I, F) dobássorozatok eredménye következik be, $\frac{3}{4}$.
2. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?
   Megoldás: A dobások összegének eredménye akkor 9, ha a $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$ vagy $(6, 3)$ dobáspárok valamelyike következik be. Ezen dobássorozatok mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az összeg pontosan 9. Hasonlóan, az összeg akkor 10, ha a $(4, 6)$, $(5, 5)$ vagy $(6, 4)$ dobáspárok valamelyike jelenik meg, és ennek a valószínűsége $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Jegyezzük meg, hogy a fenti tárgyalásban az egyes kimenetelek felsorolásában nemcsak azt vettük figyelembe, hogy milyen dobáseredmények jelentek meg, hanem azt is, hogy melyik kockán jelentek meg ezek a dobáseredmények. Miért?

   Házi feladat:

   Három szabályos dobókockát feldobunk. Mi annak a valószínűsége, hogy három hatos lesz a dobások eredménye? Annak, hogy két hatos és egy ötös? Annak, hogy egy egyes egy kettes és egy hármas?

3. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros. Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?
   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.
   Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvet tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdemes ezeket az érveléseket

mégegyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definicióját.

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül.* Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tízenhatodik húzás eredménye fehér?

   Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy a 16. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz ez $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye fehér, a második húzás eredménye piros. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$.

   Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, melyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, erért ezek a valószínűségek megegyeznek.

   Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy egy előírt konkrét 25 hosszúságú sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmaz, akkor ennek valószínűsége $P(k) = \dfrac{25 \cdot 24 \cdots (25-k+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(25-k)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valoszínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \dfrac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával.

   Jelölje $A(k;5,16)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, és az 5. helyen piros a 16. helyen pedig fehér jel áll. Jelölje továbbá $A(k;1,2)$ az olyan 25 hosszúságú sorozatok számát, melyek k piros és $25-k$ fehér jelet tartalmaznak, az 1. helyen piros a 2. helyen pedig fehér jel áll. Ekkor a két összehasonlítandó valószínűség $\sum\limits_k A(k;5,16)P(k)$ illetve $\sum\limits_k A(k;1,2)P(k)$. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk a kívánt azonosság teljesülését elegendő belátni azt, hogy $A(k;5,16) = A(k;1,2)$ minden k számra. Viszont nem nehéz belátni, hogy $A(k;5,16) = A(k;1,2) = \binom{23}{k-1}$, mert mind a két esetben 23 előírt helyre kell írni $k-1$ piros és $25-(k+1)$ fehér golyót.

Az utolsó azonosság egy másik lehetséges bizonyítása: Mutassuk meg, hogy ha tekintjük az összes 25 hosszúságú k piros és $25-k$ fehér golyót tartalmazó sorozatot, akkor az ilyen sorazatok 5. jelét kicserélve az elsővel és a 16. jelét a másodikkal kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk azon halmazok között, melyek számosságaként definiáltuk az $A(k;5,16)$ és $A(k;1,2)$ számokat.

Hasonlóan mutatható meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első, illetve hogy az ötödik húzás piros megegyezik.

De Méré lovag problémája:

Az utolsó két probléma történetileg érdekes. Ezekkel a kérdésekkel fordult de Méré lovag Pascalhoz. Sokan e feladat megoldásától, illetve Pascalnak és Fermat-nak e probléma megoldásáról szóló levelezésétől számítják a valószínűségszámítás megszületését.

a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$-nél kicsit kisebb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsit nagyobb.)

b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, melynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Megoldás:

a.) Annak a valószínűsége, hogy egy dobás eredménye nem hatos $\frac{5}{6}$, annak pedig, hogy 4 egymás utáni dobásban nem jelenik meg a hatos $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Annak a valószínűsége, hogy négy dobásban megjelenik egy hatos $P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy két kocka dobásában nem jelenik meg a dupla hatos $\frac{35}{36}$, annak a valószínűsége, hogy ez 24 dobásban nem jelenik meg $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Annak a valószínűsége, hogy 24 dobásban megjelenik egy dupla hatos $P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Érdemes megérteni, hogy a P_1 és P_2 valószínűségek miért vannak olyan közel egymáshoz. Vezessük be az $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots,$ számokat. Ekkor $1 - P_1 = a_6^{2/3}$, $1 - P_2 = a_{36}^{2/3}$. Viszont tanultuk az analízisben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$, $e = 2.71\dots$. Továbbá ez az a_n sorozat elég gyorsan tart a határértékéhez, ezért az $a_6 \sim e^{-1}$ és $a_{36} \sim e^{-1}$ elég jó közelítés. Ezért mind a P_1 mind a P_2 valószínűség jól közelíthető az $1 - e^{-2/3}$ számmal. Továbbá ismeretes, hogy az a_n sorozat monoton csökkenő, és innen adódik, hogy $P_1 < P_2$. Történetesen az $1 - e^{-2/3}$ szám közel van $\frac{1}{2}$-hez, és a P_1 és P_2 valószínűségek ezt a számot közrefogják. A P_1 szám értéke $\frac{1}{2} - \frac{23}{1296} \sim 0.48$.

b.) Tekintsük azt az általánosabb problémát, amikor n nyerés kell a tét megszerzéséhez, és az első játékos k a második pedig l alkalommal nyert. Tekintsük a következő $(n-k)+(n-l)-1 = 2n-k-l-1$ fordulót. Az első játékos akkor és csak akkor nyerné el a tétet, ha ezekben a fordulókban legalább $n-k$ alkalommal nyer. Ennek valószínősége $P = 2^{k+l+1-2n} \sum_{j=n-k}^{2n-k-l-1} \binom{2n-k-l-1}{j}$. Jelen esetben az első játékos $\frac{7}{8}$, a második játékos $\frac{1}{8}$ valószínűséggel nyeri el a tétet. Az igazságos tehát a $7:1$ arányú osztozkodás.