

A JÚNIUS 30.-i VIZSGA FELADATAI

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után többször. Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. dobásban jelenik meg az ötödik hárommal osztható szám?
2. Legyen adva két urna, mind a kettőben 9 piros és 6 fehér golyó. Egymás után 15-ször kihúzzunk egy-egy golyót mind a két urnából visszatevés nélkül. Tekintsük azokat a húzáspárokat, amelyek során különböző színű golyókat húztunk. Számítsuk ki az ilyen húzáspárok számának a várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Egy teszt-vizsgán, ahol két lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ ketten vesznek részt. Az első résztvevő p_1 , a második résztvevő pedig p_2 valószínűséggel tudja a helyes választ, továbbá a vizsga két résztvevője egymástól függetlenül tudja vagy nem tudja, hogy mi a helyes válasz. Mindkét résztvevő a jó választ jelöli meg, ha tudja azt, ellenkező esetben pedig mindentől függetlenül egyforma valószínűséggel véletlenül bejelöli a két lehetséges válasz valamelyikét. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két résztvevő a helyes választ jelölte be, feltéve, hogy ugyanazt a választ adták?
4. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és 1 szórásnégyzettel, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/2}$. Tekintsünk egy tetszőleges t valós számot, és számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.
5. A következő játékot játsszuk. Két szabályos pénzdarabot feldobnak egymás után 10 000 alkalommal. Ha egy dobás eredménye két fejdobás akkor 2 forintot nyerünk, ha az eredmény két írásdobás akkor 2 forintot veszünk, ha az eredmény egy fej és egy írásdobás akkor 1 forintot nyerünk. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat alapján annak a valószínűségére, hogy nyereségünk összege 4850 és 5300 forint között lesz.
6. Mikor mondjuk, hogy egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn adott $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egymástól függetlenek?
7. Az alábbi négy állítás közül melyik helyes és melyik nem:
 - a.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
 - b.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
 - c.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}\xi + \text{Var}\eta$.
 - d.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}\xi + \text{Var}\eta$.