

A JÚNIUS 6.–I VIZSGA FELADATAI

1. Valaki minden héten lottózik, és egy hetet akkor tekint sikeresnek, ha legalább két találatot ér el. (Egy szelvényvel játszik, 90 számból kell eltalálni 5-öt, minden lehetséges húzássorozat egyforma valószínű.) Mi annak a valószínűsége, hogy a húszadik hét a harmadik sikeres hét? (Egy viszonylag rövid formulát kérek, nem kívánom, hogy a pontos számszerű értéket kiszámolják.)
2. Adott két urna, amelyek mindegyike 20 fehér és 30 piros golyót tartalmaz. Kihúzzunk egymás után 10 alkalommal mind a két urnából egy-egy golyót visszatevés nélkül. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hány alkalommal húztunk két egyforma színű golyót. Számoljuk ki e valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Egy diáknak egy tesztlapot kell kitöltenie a vizsgán, amelyben három lehetséges válasz közül kell választania. Egy adott kérdésre p , $0 \leq p \leq 1$, valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha tudja a helyes választ, akkor a jó helyet jelöli be, ha nem akkor egyforma valószínűséggel tölti ki a lehetséges három válasz valamelyikét. Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy tudja egy kérdésre a helyes választ feltéve, hogy erre a kérdésre a jó választ jelölte be?
4. Legyen a ξ valószínűségi változó, sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$. Számoljuk ki az ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
5. Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0, 2]$ intervallumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke x -nél kisebb $\frac{x}{2}$ -vel egyenlő, ha $0 \leq x \leq 2$, eggyel egyenlő, ha $x \geq 2$, és nulla, ha $x \leq 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, melyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, melyek értéke, nagyobb mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megőrzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével.
6. Fogalmazza meg a Borel–Cantelli lemmát. (A Borel–Cantelli lemma arról szól, hogy valamely A_1, A_2, \dots , események közül mikor következik be egy valószínűséggel véges illetve végtelen sok esemény.)