DOLGOZAT FELADATOK

1. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Számítsuk ki $\xi + 2\xi^2$ sűrűségfüggvényét.

2. Legyen ξ és η két független exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ illetve μ, paraméterrel, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$ és $f(x) = 0$, ha $x < 0$, illetve η sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x \ge 0$ és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

3. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1, 1]$ intervallumon, azaz legyen sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$, ha $x > 1$ vagy $x < -1$. Számoljuk ki a ξ^4 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

4. Ledobunk a $[0, 3]$ intervallumra 24 000 pontot egyenletes eloszlással, azaz egy ledobott pont egy valószínűséggel a $[0, 3]$ intervalumba esik, és annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b] \subset [0, 3]$ intervallumba esik $\dfrac{b-a}{3}$. Ha egy pont a $[0, 1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a ledobott pont helyének pontos értékét egy jegyzőkönyvbe, ha a pont az $(1, 2]$ intervalumba esik, akkor az 1 számot, ha pedig a $(2, 3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjunk becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt 24 000 szám összege 27 900 és 28 150 közé esik.

5. Legyen ξ és η két valószínűségi változó, amelyek együttes eloszlásának létezik $f(x, y)$ sűrűségfüggvénye. Fejezzük ki a ξ és η valószínűségi változók $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$ kovarianciafüggvényét az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény segítségével.

MEGOLDÁSOK

1. Jegyezzük meg, hogy mivel ξ és $2\xi^2$ nem független valószínűségi változók, ezért összegük sűrűségfüggvényének kiszámítására nem használhatjuk a konvoluciót. Viszont ki tudjuk számolni $xi + 2\xi^2$ $G(x)$ eloszlásfüggvényét meghatározva, hogy a $xi + 2\xi^2 < x$ esemény milyen feltételt jelent a ξ valószínűségi változóra, mejd deriválva az eloszlásfüggvényt.

   Vegyük észre, hogy $\xi + 2\xi^2$ a $\xi = -\frac{1}{4}$ helyen veszi fel a minimumát. és az az $x = -\frac{1}{8}$ érték. Ez azt jelenti, hogy $G(x) = 0$, ha $x \le -\frac{1}{8}$, és $\xi + 2xi^2$ $g(x)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = 0$, ha $x \le -\frac{1}{8}$. Az $x \ge -\frac{1}{8}$ esetbem a $\xi + 2\xi^2 < x$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x_1 < \xi < x_2$, ahol $x_1 = x_1(x) = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 8x}}{4}$. $x_2 = x_2(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8x}}{4}$ a $2u^2 + u - x = 0$ egyenlet két gyöke. Ezért $G(x) = \Phi(x_2(x)) - \Phi(x_1(x))$ a fenti x_1 és x_2 számokkal, ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli. A keresett sűrűségfüggvényt e függvény (x szerinti) deriváltjaként kapjuk meg $x \geq -\frac{1}{8}$ esetben. Mivel $\dfrac{dx_2(x)}{dx} = -\dfrac{dx_1(x)}{dx} = \dfrac{4}{\sqrt{1+8x}}$, ezért

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4}{\sqrt{1+8x}}\left(\varphi\left(\frac{-1-\sqrt{1+8x}}{4}\right) + \varphi\left(\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{4}\right)\right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi(1+8x)}}\left(\exp\left\{-\frac{1}{32} - \frac{1+8x}{32} + \frac{\sqrt{1+8x}}{16}\right\}\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \exp\left\{-\frac{1}{32} - \frac{1+8x}{32} - \frac{\sqrt{1+8x}}{16}\right\}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(1+8x)\pi}}\left(\exp\left\{-\frac{1+4x-\sqrt{1+8x}}{16}\right\} + \exp\left\{-\frac{1+4x+\sqrt{1+8x}}{16}\right\}\right), \end{aligned}$$

ha $x \geq -\frac{1}{8}$.

2. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-y)\, du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x - u < 0$, azaz $u \geq x$. Innen

$$f * g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\, du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\, du, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f * g(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu - \lambda}\left[e^{-(\lambda-\mu)u}\right]_0^x = \lambda\mu\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \quad \text{ha } x \geq 0 \text{ és } \lambda \neq \mu$$

és abban az esetben, ha $\lambda = \mu$, akkor

$$f * g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x \geq 0.$$

Megjegyzés: Ha rögzítjük a λ paramétert, és a μ paramétert tartatjuk λ-hoz, akkor az $f * g(x)$ konvolució értéke tart e konvolució értékéhez $\lambda = \mu$ esetben. Valóban, ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{\mu\to\lambda} f * g(x) &= \lim_{\mu\to\lambda} \lambda\mu\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu\to\lambda} -\lambda\mu x\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\lambda x - \mu x} \\ &= -\lambda^2 x \left.\frac{de^{-u}}{du}\right|_{u=\lambda x} = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

ha $x > 0$.

3. $\operatorname{Var} \xi^4 = E(\xi^4)^2 - (E\xi^4)^2 = E\xi^8 - (E\xi^4)^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^8\, dx - \left(\int \frac{1}{2}x^4\, dx\right)^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{225}$.

Második megoldás. Számoljuk ki ξ^4 $F(x)$ eloszlás és $f(x)$ sűrűségfüggvényét.

$$F(x) = P(\xi^4 < x) = P(-x^{1/4} < x < x^{1/4}) = x^{1/4}, \qquad \text{ha } 0 \le x \le 1$$

$F(x) = 0$, ha $x \le 0$ és $F(x) = 1$, ha $x \ge 1$. Innen $f(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként. Ezért $E\xi = \int xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x^{1/4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, $E\xi^2 = \int x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x^{5/4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$, $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{225}$.

4. Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, amelyiket a j-ik pontdobás hatására a jegyzőkönyvbe írunk. Ekkor a ξ_j, $1 \le j \le 24\,000$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Jelölje $F(x)$ ezen valószínűségi változók (közös) eloszlásfüggvényét. Ezt felírhatjuk $F = F_1 + F_2$ módon, ahol F_1 egy olyan mérték eloszlásfüggvénye, amelyiknek a sűrűségfüggvénye az $f(x) = \frac{1}{3}$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$, ha $x > 1$ vagy $x < 0$ függvény, F_2 pedig olyan mérték eloszlása, amely az 1 és 2 pontba van koncentrálva, és $\mu_{F_2}(\{1\}) = \mu_{F_2}(\{2\}) = \frac{1}{3}$. Innen $E\xi_j = \int xF(\,dx) = \int xF_1(\,dx) + \int xF_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{3}x\,dx + \frac{1}{3}(1+2) = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$. Hasonlóan $E\xi_j^2 = \int x^2F(\,dx) = \int x^2F_1(\,dx) + \int x^2F_2(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{3}x^2\,dx + \frac{1}{3}(1+2^2) = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{16}{9}$. Innen $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{16}{9} - \frac{49}{36} = \frac{15}{36}$. Vezessük be az $S = \sum\limits_{j=1} 24\,000\xi_j$ jelölést. Ekkor $ES = 24\,000E\xi_1 = 28\,000$, $\operatorname{Var}S = 24\,000\operatorname{Var}\xi_1 = 10\,000 = 100^2$, és a centrális határeloszlástétel alapján

$$\begin{aligned} P(27\,900 < S < 28\,150) &= P\left(-1 < \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var}S}} < 1.5\right) \\ &\sim \Phi(1.5) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1.5) - 1 \\ &\sim 0.8413 + 0.9332 - 1 = 0.7745 \end{aligned}$$

Megjegyzés: A ξ_j valószínűségi változó keresett várható értékének kiszámolásakor a következő talán a hagyományos érvelésre jobban támaszkodva a következőképp is érvelhettünk volna. Legyen η_j a j-edik ledobott pont értéke. Ekkor η_j egyenletes eloszlású a $[0,3]$ intervallumban, és $\xi_j = h(\eta_j)$, ahol $h(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $h(x) = 1$, ha $1 \le x < 2$, $h(x) = 2$, ha $2 \le x \le 3$. Ezért $E\xi_j = Eh(\eta_j) = \int_0^3 \frac{1}{3}h(x)\,dx = \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 = \int_0^1 \frac{1}{3}x\,dx + \frac{1}{3}(1+2)$, és $E\xi_j^2 = Eh^2(\eta_j) = \int_0^3 \frac{1}{3}h(x)^2\,dx = \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 = \int_0^1 \frac{1}{3}x^2\,dx + \frac{1}{3}(1+2^2)$.

5. $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, és $E\xi\eta = \int xyf(x,y)\,dx\,dy$, $E\xi = \int xf(x,y)\,dx\,dy$, $E\eta = \int yf(x,y)\,dx\,dy$. Innen

$$\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = \int xyf(x,y)\,dx\,dy - \int xf(x,y)\,dx\,dy \int yf(x,y)\,dx\,dy.$$