A március 11.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1. Minden m valós számra

$$E(\xi-m)^2=E(\xi-E\xi)^2+((E\xi)-m)^2\,.$$

Következésképpen

$$\operatorname{Var}\xi=\inf_{-\infty<m<\infty}E\left[(\xi-m)^2\right].$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}E(\xi-m)^2&=E\left[(\xi-E\xi)+(E\xi-m)\right]^2\\&=E(\xi-E\xi)^2-2E(\xi-m)E(\xi-E\xi)+E(\xi-m)^2\\&=E(\xi-E\xi)^2+((E\xi)-m)^2\,,\end{aligned}$$

mert $2E(\xi-m)E(\xi-E\xi)=2E(\xi-m)(E\xi-E\xi)=0$. Ebből az azonosságból adódik, hogy $E(\xi-m)^2\ge E(\xi-E\xi)^2$ minden m valós számra. Viszont $m=E\xi$ esetén az egyenlőtlenség két oldala megegyezik.

2. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a fejdobások számának a várható értékét és szórásnégyzetét. Számítsuk ki ezt egyrészt direkt módon felírva és kiszámolva a várható értéket és szórásnégyzetet kifejező összeget másrészt egyszerűbben a független valószínűségi változók szórásnégyzetét kifejező képlet segítségével.

Megoldás: A fejdobások száma 0 és 100 között van. Annak valószínűsége, hogy k fejdobás következik be, $0\le k\le 100$, $p_k=\binom{100}{k}2^{-100}$. Ezért a dobások számának várható értéke $E\xi=\sum\limits_{k=0}^{100}k\binom{100}{k}2^{-100}$, ahol ξ jelőli a fejdobások számát megadó valószínűségi változót. Továbbá $E\xi^2=\sum\limits_{k=0}^{100}k^2\binom{100}{k}2^{-100}$, a szórásnégyzet pedig $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$. Ezeket az összegeket közvetlenül kiszámíthatjuk. Valóban, $k\binom{100}{k}=100\binom{99}{k-1}$, $E\xi=\sum\limits_{k=0}^{100}k\binom{100}{k}2^{-100}=50\sum\limits_{k=0}^{99}k\binom{99}{k}2^{-99}=50\left(\frac12+\frac12\right)^{99}=50$. Továbbá, $k^2\binom{100}{k}=[k(k-1)+k]\binom{100}{k}=100\cdot 99\cdot\binom{98}{k-2}+100\cdot\binom{100}{99}$, $E\xi^2=2^{-100}\cdot100\cdot99\cdot\sum\limits_{k=0}^{98}\binom{98}{k}+2^{-100}\cdot100\cdot\sum\limits_{k=0}^{99}\binom{99}{k}=2^{-100}\left(100\cdot99\cdot(1+1)^{98}+100\cdot(1+1)^{99}\right)=25\cdot99+50$, $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi^2)=25$.

Valójában a vizsgált várható értéket és szórásnégyzetet egyszerűbben is kiszámíthatjuk. Vezessük be a ξ_j valósz1nűségi változókat, $\xi_j=1$, ha a j-ik dobás eredménye fej $\xi_j=0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1\le j\le 100$. Ekkor a fejdobások száma $\xi = \sum_{j=1}^{100} \xi_j$, $E\xi = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j$, $\operatorname{Var}\xi = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j$. Mivel $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{4}$, $1 \le j \le 100$, ezért $E\xi = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.

3. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Számoljuk ki a dobáseredmények összegének várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Legyenek $\eta_1, \dots, \eta_{100}$ *független* valószínűségi változók, amelyekre $P(\eta_j = k) = \dfrac{1}{6}$, $1 \le j \le 100$, $1 \le k \le 6$. Ekkor a kiszámítandó várható érték és szórásnégyzet $E\sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} E\eta_j$, $\operatorname{Var}\sum_{j=1}^{100} \eta_j = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\eta_j$. (A második reláció felhasználja a tekintett valószínűségi változók függetlenségét.) $E\eta_j = \dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$, $E\eta_j^2 = \dfrac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \dfrac{91}{6}$, $\operatorname{Var}\eta_j = \dfrac{35}{12}$, $E\xi = 350$, $\operatorname{Var}\xi = \dfrac{3500}{12}$.

   Házi feladat:

   Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor egymás után. Tekintsük a páros értékű dobások dobáseredményeinek összegét és számítsuk ki annak szórásnégyzetét.

4. Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szörásnégyzetét.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{25} = \dfrac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{19}{49} - \dfrac{4}{25} = -\dfrac{6}{1245}$, ha $j \ne k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20E\xi_1 = 20 \cdot \dfrac{2}{5} = 8$, és szórásnégyzete $20\operatorname{Var}\xi_1 + 20 \cdot 19 \cdot \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 20 \cdot \dfrac{6}{25} - 380 \cdot \dfrac{6}{1245} = \dfrac{144}{49}$.

   Házi feladat:

   Legyen egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót, és minden húzás után a kihúzott golyót visszadobjuk egy másik azonos színű golyóval együtt. Számoltuk a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megjegyzés: Használjuk az előző gyakorlat eredményét arról, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy adott húzásban piros golyót húzunk vagy két különböző húzás mindegyikében piros golyót húzunk.

5. Egy szabályos dobókockát feldobunk tízszer. Számoljuk ki a dobásösszeg harmadik hatványának a várható értékét.

   Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a j-ik dobás eredménye k, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum_{j=1}^{10}\xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszmámítanunk. Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum_{j=1}^{10}\xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 ξ_j^3 alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3 \cdot 10 \cdot 9$ $\xi_j^2\xi_k$, $j \ne k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges (j,k) párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a k (csak egyszer szereplő tényező) három helyen szerepelhet. Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú tag, ahol a j, k és l indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j\xi_k\xi_l = (E\xi_1)^3$. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban. Innen $\left(\sum_{j=1}^{10}\xi_j(\omega)\right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1(E\xi_1)^2 + 720\,(E\xi_1)^3 = 4410 + 14332.5 + 3087 = 218295.5$, mert $E\xi_1 = 3.5$, $E\xi_1^2 = \dfrac{91}{6}$ és $E\xi_1^3 = 441$.

6. Egy urnában 10 piros és 20 fehér golyó van. Kihúzunk visszatevés nélkül 10 golyót. A páros sorszámú húzások esetén fehér golyó húzás esetén nyerünk 3 forintot, piros golyó húzás esetén pedig nem nyerünk és nem veszítünk semmit. A páratlan sorszámú húzások esetén piros húzás esetén 2 forintot nyerünk, fehér golyó húzás esetén nem nyerünk és nem veszítünk semmit. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$, valószínűségi változókat: Páros j számokra $\xi_j = 3$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Páratlan j számokra $\xi_j = 2$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor az $S = \sum_{j=1}^{10}\xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Ennek érdekében számoljuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, $\operatorname{Var}\xi_j$ szórásnégyzeteket és $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)$ kovarianciákat. Annak valószínűsége, hogy a j-ik húzás eredménye piros $\frac{1}{3}$, annak valószínűsége, hogy j-ik húzás eredménye fehér $\frac{2}{3}$. Ezért $E\xi_j = 2$, ha j páros, $E\xi_j = \frac{2}{3}$, ha j páratlan, és $ES = 5\left(2 + \frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{3}$.

   A szórásnégyzet kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy $E\xi_j^2 = 6$, $\operatorname{Var}\xi_j = 2$, ha j páros, és $E\xi_j^2 = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{8}{9}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy két j és k indexre $j \ne k$, a j-ik és k-ik húzás mindegyike fehér $\frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{38}{87}$, annak, hogy mindkét húzás piros $\frac{9}{3\cdot 29} = \frac{3}{29}$, annak, hogy az egyik húzás fehér a másik piros $\frac{2\cdot 10}{3\cdot 29} = \frac{20}{57}$. Ezért $E\xi_j\xi_k = 9 \cdot \frac{2\cdot 19}{3\cdot 29} = \frac{114}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k) = \frac{114}{29} - 4 = -\frac{2}{29}$, ha j és k páros, $E\xi_j\xi_k = 4 \cdot \frac{3}{29} = \frac{12}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k) = \frac{12}{29} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{263}$, ha j és k páratlan, $E\xi_j\xi_k = 6 \cdot \frac{20}{57} = \frac{40}{29}$, $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k) = \frac{40}{29} - \frac{4}{3} = \frac{4}{87}$, ha j és k közül az egyik páros, a másik páratlan. Olyan (j,k) pár, $1 \le j,k \le 10$, $j \ne k$, melyre j és k mindegyike páros vagy mindegyike páratlan, összesen 20 van, és olyan (j,k) pár, melyekre az egyik páros, a másik páratlan $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ van, ezért

$$\sum_{1\le j,k\le 10,\, j\ne k} \operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k) = 20\left(-\frac{2}{29}-\frac{8}{263}\right)+50\cdot\frac{4}{87}=\frac{80}{263}.$$

Innen

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S &= \sum_{j=1}^{10}\operatorname{Var}\xi_j + \sum_{1\le j,k\le 10,\, j\ne k}\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)\\ &= 5\left(2+\frac{8}{9}\right)+\frac{80}{263}=\frac{130}{9}+\frac{80}{263}=\frac{3850}{263}.\end{aligned}$$

7. Feldobunk egy szabályos pénzdarabat 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki annak várható értékét és szórásnégyzetét.

   Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99}\xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \dfrac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \dfrac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

   A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{99}\xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99}\operatorname{Var}\xi_j + 2\sum_{1\le j<k\le 99}\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k).$$

   Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j,\xi_k)=0$, ha $k \ge j+2$, mert ebben az esetben ξ_j és ξ_k függetlenek, és $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$ minden $1\le j\le 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1}=\frac{1}{8}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1}=1$, ha a j-ik, $j+1$-ik és $j+2$-ik dobások mindegyike fej, aminek valószínűsége $\frac{1}{8}$, és $\xi_j\xi_{j+1}=0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j E\xi_{j+1}=\frac{1}{16}$. Ezenkívül $Var\xi_j = \frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$. Innen $\operatorname{Var} S = 99\cdot\frac{3}{16}+2\cdot\frac{98}{16}=\frac{493}{16}$.

8. Feldobunk egy dobókockát, majd ezután egy szabályos pénzdarabot annyi alkalommal, amennyi a kockadobás eredménye volt. (Az egyes dobások eredményei függetlenek egymástól.) Számoljuk ki a fejdobások számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő $\xi_{j,k}$, $1 \le j \le 6$, $1 \le k \le j$, valószínűségi változókat:

$$\xi_{j,k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé fej} \\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye } j \text{ és a } k\text{-ik pénzdobásé írás} \\ 0 & \text{ha a kockadobás eredménye nem } j \end{cases}$$

Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{6} \sum\limits_{k=1}^{j} \xi_{j,k}$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Vegyük észre, hogy

$$E\xi_{j,k} = P(\text{a kockadobás eredménye } j, \text{ a } k\text{-ik pénzdobásé fej}) = \frac{1}{12},$$

$E\xi_{j,k}^2 = \frac{1}{12}$, $\operatorname{Var}\xi_{j,k}^2 = \frac{11}{144}$, $E\xi_{j,k}\xi_{j,k'} = \frac{1}{24}$, ha $k \ne k'$, ahonnan $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j,k'}) = \frac{5}{144}$ ebben az esetben. Továbbá $E\xi_{j,k}\xi_{j',k'} = 0$, $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j',k'}) = -\frac{1}{144}$, ha $j \ne j'$ (függetlenül a k és k' számok viszonyától. Innen, $ES = \sum\limits_{j=1}^{6} \sum\limits_{k=1}^{j} E\xi_{j,k} = \frac{1+\cdots+6}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$, és

$$\operatorname{Var} S = \sum_{j=1}^{6} \sum_{k=1}^{j} \operatorname{Var}\xi_{j,k} + \sum_{(j,k),(j',k')\colon\, j\ne j' \text{ vagy } k\ne k'} \operatorname{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j',k'}),$$

ahonnan $\operatorname{Var} S = \frac{11}{144}(1+\cdots+6) - \frac{1\cdot(21-1)+2\cdot(21-2)+\cdots 6\cdot(21-6)}{144} + \frac{5}{144}(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + \cdots 6\cdot 5)$. Ezt a képletet úgy kapjuk, hogy külön számoljuk azon $\operatorname{Cov}(\xi_{j,k}, \xi_{j',k'}$ mennyiségek hozadékát amelyekre $j \ne j'$ és azután azokét, amelyekre $j = j'$, de $k \ne k'$. Innen $\operatorname{Var} S = \frac{231-350+350}{144} = \frac{77}{48}$.

Az előbbi feladat megoldásában megjelenő egyszerű alakú végeredménynek, (a megjelenő kiejtéseknek) mélyebb oka van. Ez a következő feladat témája.

9. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású (diszkrét) valószínűségi változók, τ ezektől a valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, amely csak $0, 1, 2, \dots, N$ értékeket vesz fel valamilyen N pozitív egész számmal. Legyen $S = S_\tau = \sum\limits_{j=0}^{\tau} \xi_j$. Ekkor $ES = E\tau \cdot E\xi_1$. Ha ezenkívül $E\xi_1 = 0$, akkor $ES^2 = E\tau \cdot E\xi_1^2$. Általában $\operatorname{Var} S = E\tau \cdot \operatorname{Var}\xi_1 + (E\xi_1)^2 \cdot \operatorname{Var}\tau$.

Megoldás: Jelölje $I(\tau = k)$ az $\{\omega\colon \tau(\omega) = k\}$ esemény indikátorfüggvényét, és legyen $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$. Ekkor

$$\begin{aligned} ES &= \sum_{k=0}^{N} ES_k I(\tau = k) = \sum_{k=0}^{N} ES_k EI(\tau = k) = \sum_{k=0}^{N} kE\xi_1 P(\tau = k) \\ &= E\xi_1 \sum_{k=0}^{N} kP(\tau = k) = E\xi_1 \cdot E\tau \end{aligned}$$

a függetlenségi tulajdonságok miatt. Hasonlóan, ha $E\xi_1 = 0$, akkor

$$\begin{aligned} ES^2 &= \sum_{k=0}^{N} ES_k^2 I(\tau = k) = \sum_{k=0}^{N} ES_k^2 EI(\tau = k) = \sum_{k=0}^{N} kE\xi_1^2 P(\tau = k) \\ &= E\xi_1^2 \sum_{k=0}^{N} kP(\tau = k) = E\xi_1^2 \cdot E\tau, \end{aligned}$$

mert ebben az esetben $ES_k^2 = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j\right)^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} E\xi_j^2 + \sum\limits_{j\neq k} E\xi_j E\xi_k = \sum\limits_{j=1}^{k} E\xi_j^2 = kE\xi_1^2$.

Végül az utolsó állítás bizonyításában legyen $\bar\xi_k = \xi_k - E\xi_k$, $\bar S = \sum\limits_{k=0}^{\tau} \bar\xi_k$. $\bar S_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \bar\xi_j$, $1 \le k \le N$.
Ekkor

$$\operatorname{Var} S = E\left(\bar S + \tau E\xi_1\right)^2 - (ES)^2 = E\bar S^2 + 2E\tau\bar S \cdot E\xi_1 + E\tau^2 \left(E\xi_1\right)^2 - \left(E\tau E\xi_1\right)^2.$$

Innen $\operatorname{Var} S = E\tau \operatorname{Var}\xi_1 + (E\xi_1)^2 \left(E\tau^2 - (E\tau)^2\right) = E\tau \cdot \operatorname{Var}\xi_1 + (E\xi_1)^2 \cdot \operatorname{Var}\tau$, mert $E\tau\bar S = \sum\limits_{k=0}^{N} P(\tau = k) E\bar S_k = 0$, és $E\bar S^2 = E\tau E\bar\xi_1^2 = E\tau \operatorname{Var}\xi_1$.

10. Oldjuk meg a 8. feladatot az előző feladat eredményének a segítségével.

Megoldás: Jelölje τ az első kockadobás eredményét, és definiáljuk a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változókat a következő módon. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot egymásután, és $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Ekkor az $S = \sum\limits_{k=1}^{\tau} \xi_k$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kívánjuk kiszámolni. Továbbá, $\tau, \xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, $P(\tau = j) = \frac{1}{6}$, $1 \le j \le 6$, és $P(\xi_k = 0) = P(\xi_k = 1) = \frac{1}{2}$ minden $k = 1, 2, \dots,$ indexre. Ezért $ES = E\tau \cdot E\xi_1$, és $\operatorname{Var} S = E\tau \cdot \operatorname{Var}\xi_1 + (E\xi_1)^2 \cdot \operatorname{Var}\tau$. Továbbá $E\tau = \dfrac{7}{2}$, és $\operatorname{Var}\tau = \dfrac{35}{12}$, $E\xi_1 = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \dfrac{1}{4}$, ahonnan $ES = \dfrac{7}{4}$, $\operatorname{Var} S = \dfrac{77}{48}$.