A március 18.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

1. Adjunk egyszerű, a binomiális eloszlás valószínűségi tartalmát kihasználó bizonyítást arra, hogy a $B(n,p)$ és $B(m,p)$ binomiális eloszlások konvolúciója a $B(n+m,p)$ binomiális eloszlás.

   Megoldás: Dobjunk fel egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej és $1-p$ valószínűséggel az írás oldalára $n+m$ alkalommal egymástól függetlenül. Jelölje, S az első n dobásban, T az $n+1$-től $n+m$-ig tartó dobásokban, U pedig az $n+m$ dobásban megjelenő fej-dobások számát. Ekkor S és T függetlenek, $U=S+T$, továbbá S $B(n,p)$, T $B(m,p)$ és U $B(n+m,p)$ eloszlású valószínűségi változó. Innen és a konvolució valószínűségi tartalmából következik a feladat állítása.

2. Számítsuk ki egy $B(n,p)$ eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét az e fogalmakat definiáló összegek kiszámításának a segítségével.

   Megoldás:

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad E\xi^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

és $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$. Ezeket a kifejezéseket kell kiszámolnunk. Vegyük észre, hogy $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, $k^2\binom{n}{k}=k\binom{n}{k}+k(k-1)\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}+n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Innen

$$\begin{aligned}E\xi&=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}\\&=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{(n-1)-k}=np(1+(1-p))^{n-1}=np,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\xi^2&=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}+n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k+2}(1-p)^{n-k-2}\\&=np+n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^k(1-p)^{(n-2)-k}\\&=np+n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-1}=np+(n^2-n)p^2,\end{aligned}$$

és $\operatorname{Var}\xi=np+(n^2-n)p^2-n^2p^2=np(1-p)$.

Házi feladat:

Legyen $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ polinomiális eloszlású véletlen vektor n és p_j, $1 \le j \le r$, $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$ paraméterekkel. Ekkor $E\xi_j = np_j$, $\operatorname{Var}\xi_j = np_j(1-p_j)$, $1 \le j \le r$ és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = -np_jp_k$, $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$.

3. Bizonyítsuk be valószínűségi meggondolások segítségével, hogy egy r_1 és p paraméterű valamint egy r_2 és p paraméterű negatív binomiális eloszlás konvolúciója egy $r_1 + r_2$ és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségeloszlás. Következésképpen, egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlás előáll mint r darab p paraméterű geometriai eloszlás konvoluciója.

   Megoldás: Dobjunk fel egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej és $1-p$ valószínűséggel az írás oldalra végtelen sokszor egymástól függetlenül. Definiáljuk a ξ_j, $j = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás. Definiáljuk a $Z_1, Z_2, \ldots$ valószínűségi változókat úgy, hogy Z_j jelőli azt, hogy hányadik dobásban következett be a j-ik fejdobás, $j = 1, 2, \ldots$. Azt állítjuk, hogy az $U_j = Z_j - Z_{j-1}$, $Z_0 = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változók függetlenek, és $P(U_j = k+1) = p(1-p)^k$, minden $j = 1, 2, \ldots$ és $k = 1, 2, \ldots$ számra. Ez azt jelenti, hogy $Z_r = U_1 + \cdots + U_r$, $r = 1, 2, \ldots$, azaz a Z_r valószínűségi változót előállítottuk, mint r független, geometriai eloszlású p paraméterű valószínűségi változó összegeként. Ezért elegendő a fenti állítást belátni.

   Viszont

$$
\begin{aligned}
&\{\omega\colon U_1(\omega) = k_1 + 1, U_2(\omega) = k_2 + 1, \ldots, U_r(\omega) = k_r + 1\} \\
&\quad = \{\omega\colon Z_1(\omega) = k_1 + 1, Z_2(\omega) = k_1 + k_2 + 2, \ldots, Z_r(\omega) = k_1 + \cdots + k_r + r\} \\
&\quad = \{\omega\colon \xi_j(\omega) = 0,\ \text{ha } 1 \le j \le k_1, \xi_{k_1+1}(\omega) = 1, \\
&\qquad\quad \xi_j = 0,\ \text{ha } k_1 + 2 \le j \le k_1 + k_2 + 1, \xi_{k_1+k_2+2}(\omega) = 1, \\
&\qquad\quad \xi_j = 0,\ \text{ha } k_1 + k_2 + 3 \le k_1 + k_2 + k_3 + 3, \ldots \xi_{k_1+\cdots+k_r+r}(\omega) = 1\}.
\end{aligned}
$$

   Ezért

$$
\begin{aligned}
&P(U_1(\omega) = k_1 + 1, U_2(\omega) = k_2 + 1, \ldots, U_r(\omega) = k_r + 1) = p^r(1-p)^{k_1+\cdots+k_r} \\
&\quad = \prod_{j=1}^{r} p(1-p)^{k_j} = \prod_{j=1}^{r} P(U_j = k_j + 1),
\end{aligned}
$$

   ahol U_j geometriai eloszlású valószínűségi változó p paraméterrel.

4. Számítsuk ki egy n és p paraméterű negatív binomiális eloszású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét annak az ismeretnek a segítségével, hogy egy p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{p}$ és szórásnégyzete $\frac{1-p}{p^2}$.

Megoldás: Tekintsünk n darab független geometriai eloszlású valószínűségi változót p paraméterrel. Ezek összege negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó n és p paraméterrel. Mivel a várható érték és szórásnégyzet független valószínűségi változók összegére összeadódik, innen következik, hogy a keresett várható érték és szórásnégyzet $\frac{n}{p}$ és szórásnégyzete $\frac{n(1-p)}{p^2}$.

5. Lássuk be, hogy amennyiben egy ξ valószínűségi változó generátorfüggvénye valamely $g(x)$ függvény, akkor $E\xi = g'(1)$, $\operatorname{Var}\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$, ahol az általános esetben a $g'(1) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x)$ és $g''(1) = \lim\limits_{x\to 1} g''(x)$ képletek definiálják ezeket a mennyiségeket. Számoljuk ki egy r és p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, felhasználva, hogy e valószínűségi változó generátorfüggvénye a $\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^r$ függvény.

Megoldás: A $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ függvény két egymásutáni deriválása és az $x = 1$ helyettesítés adja, hogy $g'(1) = \sum\limits_{k=1} kp_k = E\xi$, $g''(1) = \sum\limits_{k=1} k(k-1)p_k = E\xi(\xi - 1)$. Mint azt az előadáson megtárgyaltuk az analízis bizonyos eredményei lehetővé teszik a fent alkalmazott tagonkénti deriválást. Ezért $E\xi = g'(1)$, $E\xi^2 = g''(1) + g'(1)$, és $\operatorname{Var}\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$.

Az r és p paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye

$$g(x) = \left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^r.$$

Innen

$$g'(x) = rp\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^{r-1} \frac{1}{(1-(1-p)x)^2},$$

$$\begin{aligned} g''(x) =& r(r-1)p^2\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^{r-2} \frac{1}{(1-(1-p)x)^4} \\ &+ rp\left(\frac{px}{1-(1-p)x}\right)^{r-1} \frac{2(1-p)}{(1-(1-p)x)^3}. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel $E\xi = \frac{r}{p}$, $g''(1) = \frac{r^2+r}{p^2} - \frac{2r}{p}$, $\operatorname{Var}\xi = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

6. Mutassunk példát olyan $\mathcal{P} = \{p_k \colon k = 1, 2, \dots\}$, $p_k \ge 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, valószínűség eloszlára a nem negatív egész számokon, amelynek $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$

generátorfüggvénye semmilyen $\varepsilon > 0$ szám esetén nem konvergens a $-1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$ intervallumon.

Megoldás: Legyen $\alpha > 1$ tetszőleges szám. Ekkor $C(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$, és $p_k = p_k(\alpha) = \frac{1}{C(\alpha)n^\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségeloszlás. Ennek generártor függvénye a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{C(\alpha)} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}$ semmilyen $\varepsilon > 0$ számra nem konvergál a $-1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$ intervallumon, mert minden $x > 1$ számra $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x^k}{k^\alpha} = \infty$.

Házi feladat:

Legyen ξ geometriai eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Lássuk be, hogy ξ teljesíti a következő (diszkrét) örökifjú tulajdonságot.

$$P(\xi = k + l | \xi > l) = p(1-p)^{k-1} = P(\xi = k).$$

7. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a lottóban pontosan három találatunk lesz.

   Megoldás: Ez a valószínűség $\dfrac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}$. Ugyanis $\binom{85}{2}\binom{5}{3}$ az összes olyan kitöltések száma, amely hármas találatot eredményez (a ki nem húzott számokból kettőt, a kihúzott számokból hármat kell választani), az összes kitöltések száma $\binom{90}{5}$, és minden kitöltés egyforma valószínű.

8. Számoljuk ki egy N, M és n paraméterű hipergeometrikus eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, azaz egy olyan valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét, amelyre

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le k \le n.$$

   Mutassuk meg, hogy $E\xi = n\frac{M}{N}$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{n-n}{N-1}$.

   Segítség: Tekintsünk egy urnamodellt, amelyben ξ jelöli azt, hogy N piros és $N-M$ fehér golyóból n visszatevés nélküli húzásban hány piros golyót húzunk. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér, $1 \le j \le n$. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Hogyan kell ezt csinálni? Emlékezzünk arra, hogy mint korábban megmutattuk, ebben a modellben annak a valószínűsége, hogy valamely húzás(ok)ban piros golyót húzunk nem függ attól, hogy hanyadik húzást tekintettük.

Megoldás: Tekintsünk egy urnát, amely M piros és $N-M$ fehér golyót tartalmaz, és húzzunk ki n golyót visszatevés nélkül. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás fehér. Ekkor a megoldandó feladat ekvivalens az $S = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ várható érékének és szórásnégyzetének a kiszámolásával. Viszont már korábbi eredményekből következik, hogy $E\xi_j = \frac{M}{N}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{M}{N} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$ minden $1 \le j \le N$ indexre, továbbá, $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N}\right)^2$ minden $1 \le j, k \le n$, $j \ne k$ számpárra. A várható érték additivitásából következik, hogy $ES = \frac{nM}{N}$. (Itt nincs szükség az összeadandók függetlenségének a feltételezésére.) Az összeg szórásnégyzetének kiszámítására tanult általános képletből, (amikor az összeadandók nem feltétlenül függetlenek) és a fenti formulákból következik, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} S &= n\operatorname{Var}\xi_1 + n(n-1)\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) \\
&= n\left(\frac{M}{N} - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right) + n(n-1)\left(\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N}\right)^2\right) \\
&= n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N} - (n-1)\frac{N-M}{(N-1)N}\right) \\
&= n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$

9. Ha $N \to \infty$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{M}{N} = p$, $0 < p < 1$, n rögzített egész szám, akkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{minden } 0 \le k \le n \text{ számra.}$$

Megoldás:

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \frac{(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)\cdots(N-n+1)}$$
$$\to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ ha } N \to \infty,$$

mert $\dfrac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} \to p^k$, és $\dfrac{(N-M)\cdots(N-M-n+k+1)}{(N-k)\cdots(N-n+1)} \to (1-p)^{n-k}$, ha $N \to \infty$.

Házi feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_L$ és $\eta_1, \dots, \eta_M$ valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{L} \xi_j, \sum_{k=1}^{M} \eta_k\right) = \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{M} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \eta_k).$$

10. Legyen $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ véletlen vektor polihipergeometrikus eloszlású $N_1, \dots N_r$ és n paraméterekkel. Számítsuk ki az $E\xi_j$ várható értékeket, a $\mathrm{Var}\,\xi_j$ szórásnégyzetet minden $1 \le j \le r$ számra és a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciafüggvényt, ha $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$.

Segítség: A hipergeometrikus eloszlásról szóló hasonló feladat módszere természetes módon adaptálható ebben az esetben is.

Megoldás: Számítsuk ki először a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciafüggvényt. Ennek érdekében tekintsünk egy urnát, benne N_1 1-es, N_2 2-es, ... , N_r r-es színű golyót, és húzzunk ki belőlük n-et visszatevés nélkül. Legyen $N = \sum\limits_{k=1}^{r} N_r$, és vezessük be a következő $\eta_{l,s}$, $1 \le l \le n$, $1 \le s \le r$, valószínűségi változókat: $\eta_{l,s} = 1$, ha az l-ik húzásban s-es színű golyót húzunk, és $\eta_{l,s} = 0$, ha az l-ik húzás eredménye más. Definiáljuk a $\xi_s = \sum\limits_{l=1}^{n} \eta_{l,s}$ véletlen összegeket, $1 \le s \le r$. Ekkor a $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$ kovarianciafüggvényt kell kiszámolnunk az előbb definiált valószínűségi változókkal.

Ezt a hipergeometrikus eloszlás esetén alkalmazott érvelés természetes adaptációjával és az előző házi feladat eredményének felhasználásával tehetjük meg.

Először ki kell számolnunk az $\mathrm{Cov}\,(\eta_{l,j}, \eta_{l',k})$ kovarianciafüggvényeket. Külön kell választani az $l = l'$ és $l \ne l'$ eseteket. Mind a két esetben használhatjuk azt a tényt, hogy hasonlóan a két színű golyót tartalmazó urnamodellhez annak, hogy milyen valószínűséggel húzok bizonyos előírt színű golyókat adott húzásban nem függ attól, hogy hanyadik húzást tekintettük. Miért?

Az $l = l'$ esetben

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(\eta_{l,j}, \eta_{l,k}) &= P\,(\eta_{l,j} = 1, \eta_{l,k} = 1) - P\,(\eta_{l,j} = 1)\,P\,(\eta_{l,k} = 1) \\ &= -P\,(\eta_{1,j} = 1)\,P\,(\eta_{1,k} = 1) = -\frac{N_j N_k}{N^2}.\end{aligned}$$

Ha $l \neq l'$, akkor

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(\eta_{l,j}, \eta_{l',k}) &= P\,(\eta_{l,j} = 1, \eta_{l',k} = 1) - P\,(\eta_{l,j} = 1)\,P\,(\eta_{l',k} = 1)\\ &= P\,(\eta_{1,j} = 1, \eta_{2,k} = 1) - P\,(\eta_{1,j} = 1)\,P\,(\eta_{1,k} = 1)\\ &= \frac{N_j N_k}{N(N-1)} - \frac{N_j N_k}{N^2}.\end{aligned}$$

Innen, illetve az előző házi feladatban megfogalmazott eredmény alapján

$$\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = -n\frac{N_j N_k}{N^2} + n(n-1)\left(\frac{N_j N_k}{N(N-1)} - \frac{N_j N_k}{N^2}\right) = n\frac{(n-N)N_j N_k}{(N-1)N^2}.$$

Az $E\xi_j$ és $\mathrm{Var}\,\xi_j$ mennyiségeket is ki lehet számítani hasonlóan, de erre nincs szükség. Ha csak azt vesszük figyelembe, hogy az l-ik húzásban j-es vagy más színű golyót húztunk-e, azaz csak az $\eta_{j,l}$ valószínűségi változókkal dolgozunk, akkor rövid meggondolás után láthatjuk, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a (két színnel rendelkező) hipergeometrikus eloszlást modellező urnamodell esetén $M = N_j$ és $N - M = N - N_j$ paraméterekkel. Ezért $E\xi_j = n\frac{N_j}{N}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = n\frac{N_j}{N}\left(1 - \frac{N_j}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.

11. Mutassuk meg, hogy a Poisson eloszlás generátorfüggvényének alakjából látható, hogy ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

    Megoldás: Jelölje $g_\lambda(x)$ a λ paraméterű Poisson eloszlás generátorfüggvényét. Láttuk, hogy $g_\lambda(x) = e^{\lambda(x-1)}$. Innen látszik, hogy $g_{\lambda+\mu}(x) = g_\lambda(x)g_\mu(x)$. Innen viszont, mint azt az előadáson megbeszéltük következik a feladat állítása.

12. Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j \geq 0$ valószínűséggel esik, $j = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j = 1, \dots, k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j = 1, \dots, k$.

    Megoldás:

$$\begin{aligned}P(\eta_1 = l_1, \dots, \eta_k = l_k) &= P(\xi = l_1 + \dots + l_k)\frac{(l_1 + \dots + l_k)!}{l_1! \cdots l_k!}p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k}\\ &= \frac{\lambda^{(l_1+\dots+l_k)}}{l_1! \cdots l_k!}p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda}\\ &= \frac{\lambda^{l_1} \cdots \lambda^{l_k}}{l_1! \cdots l_k!}p_1^{l_1} \cdots p_k^{l_k} e^{-\lambda(p_1+\dots+p_k)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!} e^{-\lambda p_j}\end{aligned}$$

tetszőleges $l_1 \geq 0, \ldots, l_k \geq 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

13. Lássuk be az előző feladat segítségével a következő állítást:

Legyen adva ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Dobjunk le egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül véletlenül egyenletesen ξ darab pontot az egységintervallumra, azaz tegyük fel, hogy minden pont $b-a$ valószínűséggel esik valamely $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumba. Ekkor a $[0,1]$ intervallum tetszőleges felbontására $[s_0, s_1]$, $[s_1, s_2]$, $\ldots$, $[s_{k-1}, s_k]$ intervallumokra, $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$, az egyes intervallumokba eső pontok száma egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel.

Megoldás: Tekintsük a következő urnamodellt. Tekintünk ξ számú golyót, tehát annyit, ahány ledobott pontot tekintettünk az előző feladatban. Tegyük az l-ik golyót a j-ik urnába, ha a l-ik pont az $[s_{j-1}, s_j]$ intervallumba esett, $1 \leq j \leq k$. Akkor az előző feladat eredménye alapján az egyes urnákba eső golyók száma egymástól függetetlen Poisson eloszlású valószínűségi változó $s_j - s_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$, paraméterrel. Innen következik a feladat állítása.

Házi feladat:

Legyenek ξ_j, $j = 1, \ldots, r$, független Poisson eloszlású valószínűségi változók λ_j, $1 \leq j \leq r$, paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_r = k_r \,\middle|\, \sum_{j=1}^{r} \xi_j = n\right) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} \prod_{j=1}^{r} \frac{\lambda_j^{k_j}}{\left(\sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s\right)^{k_j}},$$

ha $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$. Azaz a $\xi_1, \ldots, \xi_r$ vektor feltételes eloszlása feltéve, hogy $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$ a polinomiális eloszlás n és $p_j = \dfrac{\lambda_j}{\sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s}$, $1 \leq j \leq r$, paraméterekkel.