**DOLGOZAT FELADATOK**

*Megjegyzés:* Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után 100-szor egymástól függetlenül. Számítsuk ki a páros értékű dobások összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.
2. Egy urnában 20 fehér és 30 piros golyó van. Kihúzunk 10 golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk egy ugyanolyan színű golyót. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Feldobunk három szabályos dobókockát. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy bekövetkezett egy nem hatos dobás, feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos volt?
4. Mi a valószínűsége annak, hogy lottóhúzáskor (90 számból húznak ki ötöt), legalább hármas találatunk lesz?
5. Legyen $A_1$, $A_2$ és $A_3$ három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy az $A_1$, $A_2$ és $A_3$ események függetlenek?

*Megoldások:*

1. Vezessük be a következő $\xi_j$, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik dobás eredménye páratlan, $\xi_j = 2$, ha a $j$-ik dobás értéke 2, $\xi_j = 4$, ha a $j$-ik dobás értéke 4, és $\xi_j = 6$, ha a $j$-ik dobás értéke 6, $1 \le j \le 100$. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Viszont $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{6}(2^2+4^2+6^2) = \frac{28}{3}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{16}{3}$ minden $1 \le j \le 100$ indexre. Mivel a $\xi_j$ valószínűségi változók függetlenek, ezért ebből következik, hogy $E\xi = 200$ és $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1600}{3}$.
2. Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a $j$-ik húzás eredménye piros, és $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik húzás eredménye fehér, $1 \le j \le 10$. Ekkor minket a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Ennek kiszámítása érdekében számoljuk ki először a $\xi_j$, $1 \le j \le 10$, várható értékeket, $\mathrm{Var}\,\xi_j$, $1 \le j \le 10$, szórásnégyzeteket és $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k)$, $1 \le j < k \le 10$, kovarianciákat. Vegyük észre, hogy $E\xi_j$ megegyezik annak valószínűségével, hogy a $j$-ik húzás eredménye piros, ami, mint azt mind az órán mind a gyakorlaton megtárgyaltuk, megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros. Ezért $E\xi_j = \frac{3}{5}$. Hasonlóan, $E\xi_j\xi_k = E\xi_1\xi_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{31}{51}$, ahol az utolsó mennyiség annak valószínűsége, hogy az első két húzás piros. Ezért $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j E\xi_k - E\xi_j\xi_k =$

$\frac{3}{5}\left(\frac{31}{51}-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{425}$. Továbbá $\mathrm{Var}\,\xi_j=E\xi_j^2-(E\xi_j)^2=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{6}{25}$. Ezért $E\xi=\sum\limits_{j=1}^{10}E\xi_j=10\cdot\frac{3}{5}=6$, és $\mathrm{Var}\,\xi=\sum\limits_{j=1}^{10}\mathrm{Var}\,\xi_j+2\sum\limits_{j=1}^{9}\sum\limits_{k=j+1}^{10}\mathrm{Cov}\,(\xi_j,\xi_k)=\frac{12}{5}+90\cdot\frac{2}{425}=\frac{12}{5}+\frac{36}{85}=\frac{240}{85}=\frac{48}{17}$.

3. Jelölje $A$ azt az eseményt, hogy történt hatos dobás, és $B$ azt, hogy történt nem hatos dobás. Ekkor a $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ valószínűséget kell kiszámítanunk. Az $A$ esemény komplementere az az esemény, hogy mind a három dobás nem hatos, ezért $1-P(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^3$, $P(A)=\frac{91}{216}$. Az $A\cap B$ esemény komplementere az az esemény, hogy vagy mind a három dobás eredménye hatos, vagy mind a három dobás eredménye nem hatos. Ezért $1-P(A\cap B)=\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3$, $P(A\cap B)=\frac{90}{216}$, $P(B|A)=\frac{90}{91}$.

   *Megjegyzés:* A $P(A\cap B)$ valószínűséget kissé kevésbé elegáns módon a következőképp is kiszámolhatjuk. Az $A\cap B$ esemény bekövetkezése azt jelenti, hogy vagy két hatos és egy nem hatos vagy egy hatos és két nem hatos dobás következik be. Mind a két fajta dobássorozat három különböző módon történhet, és az ilyen tipusú sorozatok valólszínűsége $\frac{5}{216}$, illetve $\frac{25}{216}$. Ezért $P(A\cap B)=3\cdot\frac{25+5}{216}=\frac{90}{216}$.

4. Annak valószínűsége, hogy pontosan három találatunk van $\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$, mert az öt jó számból kell kiválasztanunk 3-at és a 85 rosszból kettőt, és minden választás egyforma valószínű. Hasonlóan annak valószínűsége, hogy pontosan négy találatunk lesz $\frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}$, és annak valószínűsége, hogy öt találatunk lesz $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Ezért a keresett valószínűség $\frac{5\cdot 85\cdot 84+5\cdot 85+1}{\binom{90}{5}}$.

5. Az $A_1$, $A_2$ és $A_3$ események akkor függetlenek, ha a $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1\cap A_3)=P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2\cap A_3)=P(A_2)P(A_3)$ és $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ azonosságok mindegyike teljesül.