DOLGOZAT FELADATOK

(A programozó matematikus gyakorlaton)

1.) Legyen egy urnában 10 piros és 40 fehér golyó. Húzzunk ki az urnából 10 golyót visszatevés nélkül. Mi a kihízottt piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

2.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, azaz legyen ξ eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Számoljuk ki ξ^3 sűrűségfüggvényét.

3.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvéye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Számítsuk ki a ξ^5 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

4.) Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin x\right)$, ha $0 \le x \le 2\pi$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2\pi$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

5.) Egy szabályos dobókockát feldobunk 1200 alkalommal egymástól függetlenül, és összeadjuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 2280 és 2500 közé esik.

6.) Legyen adva n darab $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek egymástól?

MEGOLDÁSOK

1.) Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 10$ valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a J-ik húzás piros $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás fehér. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Jegyezzük meg, hogy $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{1}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ minden $1 \le j \le 10$ indexre, és $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{49} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{4}{1225}$ minden $1 \le j,k \le 10$, $j \ne k$ indexre. Innen $ES = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j = 2$, és $\operatorname{Var}S = \sum\limits_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\xi_j + 2\sum\limits_{j=1}^{9}\sum\limits_{k=j+1}^{10} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 10 \cdot \frac{4}{25} - 90 \cdot \frac{4}{1225} = \frac{64}{49}$.

2.) Jelölje $G(x)$ a ξ^3 valószínűségi változó eloszlás és $g(x)$ ξ^3 sűrűségfüggvényét. Ekkor $G(x) = P(\xi^3 < x) = P(\xi < x^{1/3}) = F(x^{1/3})$, ahol $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x^{1/3}}$. Mivel $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$, ezért $g(x) = 0$, ha $x < 0$, $g(x) = \frac{1}{3}\lambda x^{-2/3} e^{-\lambda x^{1/3}}$, ha $x \ge 0$.

3.) *Első megoldás:* $E\xi^5 = \int_0^1 x^5\, dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$, és $\operatorname{Var}\xi^5 = E(\xi^5)^2 - (E\xi^5)^2 =$

$E\xi^{10} - \left(\frac{1}{6}\right)^2$, $E\xi^{10} = \int_0^1 x^{10}\,dx = \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{1}{11}$, ahonnan $\mathrm{Var}\,\xi^5 = \frac{1}{11} - \frac{1}{36} = \frac{25}{396}$.

Második megoldás: Számoljuk ki először az $\eta = \xi^5$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét. $G(x) = P(\eta < x) = P(\xi < x^{1/5})$, $G(x) = x^{1/5}$, ha $0 \le x \le 1$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$, $g(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Ezért $E\xi^5 = E\eta = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{5}{6}x^{6/5}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$, $\mathrm{Var}\,\xi^5 = \mathrm{Var}\,\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{5}\left[\frac{5}{11}x^{11/5}\right]_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{36} = \frac{25}{396}$.

4.) Tudjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^{2\pi} x\frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\sin x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx,$$

$\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$, és

$$E\xi^2 = \int_0^{2\pi} x^2\frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\sin x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx.$$

Továbbá $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^2}{2} = \pi$, és $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^2$,. Parciális integrálással ($x\sin x = -x\frac{d}{dx}\cos x$ szereposztással) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx &= \frac{1}{4\pi}\left[-x\cos x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(-2\pi + [\sin x]_0^{2\pi}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan, kétszeres parciális integrálás adja, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx &= \frac{1}{4\pi}\left[-x^2\cos x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 2x\cos x\,dx \\ &= -\pi + \frac{1}{4\pi}\left[2x\sin x\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = -\pi + \frac{1}{4\pi}\left[2x\sin x\right]_0^{2\pi} = -\pi.\end{aligned}$$

Innen $E\xi = \pi - \frac{1}{2}$, $E\xi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{4}{3}\pi^2 - \pi - (\pi - \frac{1}{2})^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4}$.

5.) Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 1200$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a J-ik dobás értéke 2, $\xi_j = 4$, ha a J-ik dobás értéke 4, $\xi_j = 6$, ha a J-ik dobás értéke 6, $\xi_j = 0$, ha a J-ik dobás értéke 1, 3 vagy 5. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak, és az $S = \sum_{j=1}^{1200}\xi_j$ jelöléssel minket a $P(2280 < S < 2500)$ valószínűség érdekel. Továbbá, $E\xi_j = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $E\xi_j^2 = \frac{1}{6}(2^2 + 4^2 + 6^2) = \frac{28}{3}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{1}{6}3$, ahonnan $ES = 2400$, $\mathrm{Var}\,S = 1200 \cdot \frac{16}{3} = (80)^2$. Innen $P(2280 < S < 2500) = P(-1.5 < \frac{S-ES}{\sqrt{S}} < 1.25)$, és a centrális határeloszlástétel szerint $P(-1.5 < \frac{S-ES}{\sqrt{S}} < 1.25) \sim \Phi(1.25) - \Phi(-1.5) = \Phi(1.5) + \Phi(1.25) - 1 \sim 0.8944 + 0.933 - 1 = 0.8276$. A keresett valószínűség tehát körülbelül 0.83.

6.) **Valószínűségi változók függetlenségének a definiciója.** *Legyenek* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változók egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden* $x_1, \ldots, x_n$ *valós számra*

$$P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Elfogadtam a következő választ is, mert a valószínűségszámítás bizonyos eredményei szerint ez ekvivalens az eredeti definicióval.

A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változók akkor függetlenek, ha a számegyenes minden* $B_1, \ldots, B_n$ *Borel mérhető részhalmazára teljesül a*

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

azonosság.