DOLGOZAT FELADATOK

(A programozó matematikus gyakorlaton)

1.) Minden héten 1 000 000 ember lottózik, akik a lottószelvényeiket egymástól függetlenül töltik ki. (90 számból kell eltalálni az öt kihúzott azámot.) Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. héten lesz először 5 találat?

2.) Három város valamelyikébe érkeztünk, mindegyikbe egyforma, azaz 1/3 valószínűséggel. Az egyik az igazmondók városa, ahol minden kérdésre 0.9 valószínűséggel válaszolnak igazat, a második a hazugok városa, ahol minden kérdésre 0.8 valószínűséggel hamis választ adnak, a harmadik a figyelmetlenek városa, ahol minden kérdésre a kérdéstől függetlenül 1/2 valószíműséggel igent és 1/2 valószínűséggel nemet válaszolnak. Megkérdezünk egy embert, akivel találkoztunk, hogy az igazmondók városába érkeztünk-e. Azt a választ kapjuk, hogy nem. Mi annak a valószínűsége, hogy az igazmondók városába érkeztünk?

3.) Két szabályos dobókockát feldobunk. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás páros feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?

4.) Egy szabályos dobókockát feldobunk százszor. Számoljuk a páros értékű dobások öszegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

5.) Egy szabályos dobókockát feldobunk 101 alkalommal. Arra vagyunk kiváncsiak, hogy hány olyan dobásidőpont volt, (a 2., 3., és így tovább a 101. dobásidőpontok között), amikor a dobás értéke (szigorúan) nagyobb volt, mint a megelőző dobás értéke. Számítsuk ki az ilyen dobásidőpontok számának a várható értékét.

6.) Mikor mondjuk, hogy három A, B és C esemény független egymástól?

MEGOLDÁSOK

1.) Annak a valószínűsége, hogy valaki egy héten ötös találatot ér el, $\frac{1}{\binom{90}{5}}$, annak a valószínűsége, hogy nem ér el ötös találatot $1-\frac{1}{\binom{90}{5}}$, és mivel a lottózok egymástól függetlenüljátszanak, annak valószínűsége, hogy az 1 000 000 lottozó egyike sem ér el ötös találatot egy adott héten $P=\left(1-\frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^{1\ 000\ 000}$. Továbbá annak valószínűsége, hogy 19 héten keresztül nincs ötös találat, a 20. héten viszont van $P^{19}(1-P)$. Ezért a keresett valószínűség

$$\left(1-\frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^{19\ 000\ 000}\left(1-\left(1-\frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^{1\ 000\ 000}\right).$$

2.) Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az igazmondók városába érkeztünk, A_2 hogy a hazugok, A_3, pedig, hogy a figyelmetlenek városába. Jelölje B azt az eseményt, hogy kérdésünkre nemleges választ kaptunk. Ekkor feltevéseink szerint $P(A_1) =$

$P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$, $P(B|A_1) = 0.1$ (az igazmondók városában hazudtak), $P(B|A_2) = 0.2$ (a hazugok városában igazat mondtak), $P(A_3|B) = 0.5$. Minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Ez

$$P(B|A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.1}{\frac{1}{3} \cdot 0.1 + \frac{1}{3} \cdot 0.2 + \frac{1}{3} \cdot 0.5} = \frac{1}{8}.$$

3.) A keresett feltételes valószínűség megegyezik annak a valószínűségével, hogy az egyik dobás hatos a másik dobás pedig páros osztva annak a valószínűségével, hogy volt egy hatos dobás. Az, hogy az egyik dobás hatos a másik pedig páros azt jelenti, hogy a (2,6), (4,6), (6,6), (6,2), (6,4) dobások valamelyike következik be, ennek valószínűsége pedig $\frac{5}{36}$. Annak valószínűsége, hogy lesz hatos dobás a valószínűsége pedig $\frac{11}{36}$. Ez például úgy látható, hogy annak valószínűsége, hogy nem lesz hatos dobás $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, a komplementer esemény valószínűsége pedig $\frac{11}{36}$. Így a keresett feltételes valószínűség értéke $\frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11}$.

4.) Vezessük be a következő ξ_k valószínűségi változókat, $1 \le k \le 100$: $\xi_k = 2$, ha a k-ik kockadobás értéke 2, $\xi_k = 4$, ha a k-ik kockadobás értéke 4, $\xi_k = 6$, ha a k-ik kockadobás értéke 6, $\xi_k = 0$, ha a k-ik kockadobás értéke 1, 3 vagy 5. Ekkor minket a $\xi = \sum\limits_{k=1}^{100} \xi_k$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Viszont $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{100} E\xi_k$ $\operatorname{Var} \xi = \sum\limits_{k=1}^{100} \operatorname{Var} \xi_k$, $E\xi_k = \frac{1}{6}(2 + 4 + 6) = 2$, $\operatorname{Var} \xi_k = E\xi_k^2 - (E\xi_k)^2$, $E\xi_k^2 = \frac{1}{6}(4 + 16 + 36) = \frac{28}{3}$, $\operatorname{Var} \xi_k = 163$ minden $1 \le k \le 100$ számra. Innen következik, hogy $E\xi = 100 \cdot 2 = 200$, $\operatorname{Var} \xi = 100 \cdot \frac{16}{3} = \frac{1600}{3}$.

5.) Vezessük be a következő ξ_k valószínűségi változókat, $1 \le k \le 100$: $\xi_k = 1$, ha a $k + 1$-ik kockadobás értéke nagyobb, mint a k-ik kockadobás értéke, $\xi_k = 0$, ha a $k + 1$-ik kockadobás értéke kisebb vagy egyenlő, mint a k-ik kockadobás értéke. Ekkor minket a $\xi = \sum\limits_{k=1}^{100} \xi_k$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Viszont $E\xi = \sum\limits_{k=1}^{100} E\xi_k$, $E\xi_k = P(\xi_k = 1$, és $P(\xi_k = \frac{1}{36}(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = \frac{5}{12}$, (Ha a k-ik dobás értéke 1, akkor a $k + 1$-ik dobás 5 értéket vehet fel, ha 2 akkor 4-et, ha 3 akkor 3-at sit.) Ezért a keresett várható érték $\frac{500}{12} = \frac{125}{3}$.

6.) Az A, B és C események akkor függetlenek, ha a következő azonosságok mindegyike teljesül:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$