

A november 11.-i gyakorlat témája

Meg fogunk tárgyalni néhány fontos fogalmat és alapvető eredményt általános, nem feltétlenül diszkrét értékű valószínűségi változókról. Megbeszéljük általános (nem feltétlenül diszkrét eloszlású) valószínűségi változó eloszlásának fogalmát, azt hogy mit értünk ezek várható értékén, szórásnégyzetén, és hogyan számoljuk azt ki.

Valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a definíciója. Legyen adva egy $\xi(\omega)$ (valós értékű) valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Ennek $F(x)$ eloszlásfüggvényén az $F(x) = P(\{\omega: \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, függvényt értjük.

- 1.) Tekintsük egy szabályos dobókocka feldobását, illetve azt a valószínűségi változót, amely megmondja mi a dobás eredménye. Határozzuk meg ennek a ξ valószínűségi változónak az $F(x)$ eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a dobásértékek négyzetének az eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Ez a ξ valószínűségi változó az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 értékek valamelyikét veszi fel, mindegyiket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel. Ezért annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < x)$ nullával egyenlő, ha $x < 1$. Sőt $x = 1$ esetében is teljesül a $P(\xi < 1) = 0$ azonosság, mert annak valószínűségét nézzük, hogy a ξ valószínűségi változó szigorúan kisebb mint az x szám. Ezért $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \leq 1$. Ha $1 < x < 2$, akkor az $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1. Ez az állítás igaz $x = 2$ esetében is. Ezért $F(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \leq 2$. Ha $2 < x \leq 3$, akkor az $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ esemény azt jelenti, hogy a dobás eredménye 1 vagy 2. Ezért $F(x) = \frac{2}{6}$, ha $2 < x \leq 3$. Ezt a gondolatot végigkövetve kapjuk, hogy $F(x) = 0$, ha $-\infty < x \leq 1$, $F(x) = \frac{j}{6}$, ha $j < x \leq j + 1$, $1 \leq j \leq 5$, és $F(x) = 1$, ha $6 < x < \infty$. Ha a dobások négyzetének az eloszlásfüggvényére vagyunk kíváncsiak akkor hasonlóan vizsgálhatjuk a helyzetet. Ekkor a vizsgált valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvénye a következő lesz: $G(x) = 0$, ha $-\infty < x \leq 1$, mert ebben annak valószínűsége, hogy a dobás értékének négyzete kisebb, mint x egy $x \leq 1$ szám esetén 0. $G(x) = \frac{1}{6}$, ha $1 < x \leq 4$, mert az az esemény, hogy a dobás értékének négyzete kisebb mint x egy $1 < x < 4$ szám esetén akkor következik be, ha a dobás értéke 1. $G(x) = \frac{2}{6}$, ha $4 < x \leq 9$, mert a dobás értékének a négyzete akkor kisebb, mint x egy $4 < x < 9$ szám esetében, ha a dobás 1 vagy 2. Hasonlóan, $G(x) = \frac{3}{6}$, ha $9 < x < 16$, $G(x) = \frac{4}{6}$, ha $16 < x < 25$, $G(x) = \frac{5}{6}$, ha $25 < x < 36$, és $G(x) = 1$, ha $36 < x$.

- 2.) Ledobunk egy pontot egyenletesen a $[0, 2]$ intervallumra, azaz annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b] \subset [0, 2]$ intervallumba esik $\frac{b-a}{2}$. Mi a ledobott pont helyének az eloszlásfüggvénye? Írjuk fel a ledobott pont helyének az értékét akkor, ha az a $[0, 1]$ intervallumba esik, de az 1 számot írjuk fel, ha a dobás értéke

az $[1, 2]$ intervallumba esik. Mi a felírt szám eloszlásfüggvénye? Mi lesz a felírt szám eloszlásfüggvénye, ha abban az esetben, ha a ledobott pont az $[1, 2]$ intervallumba esik, akkor nullát írunk, ha a $[0, 1]$ intervallumba, akkor magát a számot.

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont ξ értéke kisebb, mint x $P(\xi < x) = 0$, ha $x \leq 0$, $P(\xi < x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \leq x \leq 2$, és $P(\xi < x) = 1$, ha $x > 2$. Ezért a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $F(x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \leq x \leq 2$, és $F(x) = 1$, ha $x > 2$, azaz egy $\frac{1}{2}$ meredekségű egyenes a $[0, 2]$ intervallumon, és $F(x)$ a vízszintes $x = 2$ egyenes az $x > 2$, és az $x = 0$ vízszintes egyenes az $x < 0$ félegyenesen.

A felírt (véletlen) η szám $G(x)$ eloszlásfüggvénye az első esetben $P(\eta < x) = 0$, ha $-\infty < x \leq 0$, ha $x \leq 0$, $P(\eta < x) = \frac{x}{2}$, ha $0 < x \leq 1$, és $P(\eta < x) = 1$, ha $x > 1$. Ez azt jelenti, hogy $G(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $G(x) = \frac{x}{2}$, ha $x \leq 1$, (ebben hasonló a viselkedése az előbb tekintett $F(x)$ függvényhez), de az $x = 1$ pontban ugrik, és $G(x) = 1$, ha $x > 1$.

A második esetben tekintett véletlen szám $H(x)$ eloszlásfüggvénye hasonlóan határozható meg. A különbség az, hogy ekkor a $[0, 1]$ intervallumban $H(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq 1$. Ekkor ugyanis a felírt szám akkor lesz kisebb, mint x , $0 \leq x \leq 1$, ha a ledobott pont vagy a $[0, 1]$ vagy az $[1, 2]$ intervallumba esik, és ennek valószínűsége $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Továbbá $H(x) = 0$, ha $x \leq 0$, és $H(x) = 1$, ha $x > 1$.

Házi feladat:

Feldobunk egy pénzdarabot, amely p valószínűséggel esik a fej, $1 - p$ valószínűséggel az írás oldalra kétszer egymástól függetlenül. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely a fejdobások számát adja meg. Adjuk meg a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét.

Ledobunk egy pontot véletlenül egyenletes eloszlással a $[0, 1]$ intervallumba, azaz annak valószínűsége, hogy a pont egy $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba esik $b - a$. Határozzuk meg a ledobott pont négyzetének az eloszlásfüggvényét.

Az előző példákban láttunk néhány példát arra, hogy hogyan nézhet ki egy eloszlásfüggvény. Most kimondok egy tételt, amelyik megadja, hogy milyen alakú lehet egy eloszlásfüggvény az általános esetben.

Tétel. Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, és legyen $F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\})$, $-\infty < x < \infty$, e valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Az $F(x)$ eloszlásfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.

a) $F(x)$ monoton növekvő függvény.

b) $F(x)$ balról folytonos függvény, azaz $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} F(x - h) = F(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$

Ha egy $F(x)$ függvény teljesíti az előbb megfogalmazott a)–d) tulajdonságokat, akkor az eloszlásfüggvény. Részletesebben megfogalmazva ez azt jelenti, hogy ha az $F(x)$ függvény teljesíti az a)–d) feltételeket, akkor létezik egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező, és azon olyan $\xi(\omega)$ valószínűségi változó, amelynek az eloszlásfüggvénye ez az $F(x)$ függvény.

Megtárgyaljuk röviden egy valószínűségi változó várható értékének a definícióját, de számunkra elsősorban nem ez lesz az érdekes, hanem az, hogy hogyan lehet kiszámítani egy valószínűségi változó várható értékét annak eloszlásfüggvénye illetve a később ismertető sűrűségfüggvénye segítségével. (Egyébként nem minden valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye.)

Valószínűségi változó várható értékének formális definíciója. Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. E valószínűségi változó várható értékét úgy definiáljuk, mint a $\xi(\omega)$ függvénynek az

$$E\xi(\omega) = \int \xi(\omega) dP(\omega)$$

Lebesgue integrálját a P valószínűségi mérték szerint, feltéve, hogy $\int |\xi(\omega)| dP(\omega) < \infty$. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó várható értékét.

A következő *Fontos Tétel*-nek nevezett eredmény lehetővé teszi egy valószínűségi változó várható értékének kiszámítását csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az ismeretében.

Fontos Tétel. Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$E\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xF(dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x|F(dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\xi$ várható értéket nem definiáltuk.

Sőt igaz a Fontos Tétel következő általánosítása.

A Fontos Tétel általánosítása. Legyen $\xi(\omega)$ valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, amelynek $F(x)$ az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvénye. Legyen $g(x)$ tetszőleges (mérhető) függvény a számegegyenesen, és definiáljuk az $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ valószínűségi változót. Ekkor

$$E\eta(\omega) = Eg(\xi(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(dx),$$

ahol a fenti integrál Lebesgue–Stieltjes integrált jelöl az F mérték szerint. Ez a formula akkor érvényes, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|F(dx) < \infty$. Ellenkező esetben az $E\eta$ várható értéket nem definiáltuk.

Megjegyzés: Az előbb megfogalmazott eredményekben szerepelt az $\int_{-\infty}^{\infty} |x|F(dx) < \infty$, illetve $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|F(dx) < \infty$ feltétel. E feltételek természetes megfelelői annak a diszkrét valószínűségi változók esetében szereplő feltételnek, hogy egy diszkrét valószínűségi változó várható értékét definiáló összeg legyen abszolút konvergens.

Legyen ξ diszkrét értékű valószínűségi változó, amely valamely x_1, x_2, \dots , valós értékeket vesznek fel. Ekkor

$$E\xi = \sum_i x_i P(\xi = x_i)$$

$$Eg(\xi) = \sum_i g(x_i) P(\xi = x_i),$$

feltéve, hogy a jobboldalon szereplő összegek abszolút konvergenssek.

Gyakorlati szempontból, annak érdekében, hogy a leggyakrabban előforduló esetekben jobban tudjunk számolni, érdemes bevezetni egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének a definícióját. Ez lehetővé teszi, hogy a problémákban felmerülő és sokszor kényelmetlenül kezelhető Lebesgue integrálokat átírjuk mint (közönséges) Riemann integrálokat.

Sűrűségfüggvény definíciója. Egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény sűrűségfüggvénye, ha minden $-\infty < x < \infty$ számra teljesül az

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

azonosság.

Annak érdekében, hogy megértsük, hogyan tudjuk egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényét kiszámítani, idézzük fel a klasszikus analízis egyik alapvető eredményét, a Newton–Leibniz formulát.

Newton–Leibniz formula. Legyen $F(x)$ folytonos függvény egy $[a, b]$ véges intervallumon, amely véges sok pont kivételével folytonosan deriválható. Legyen $f(u) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=u}$ minden pontban, ahol az $F(\cdot)$ differenciálható. Ekkor $F(x) - F(a) = \int_a^x f(u) du$ minden $a \leq x \leq b$ számra. Továbbá, ha a fenti feltétel teljesül minden véges $[a, b]$ intervallumban, és létezik a $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ határérték, akkor $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.

Megfordítva, ha $f(u)$, (pontosabban annak abszolút értéke) integrálható függvény egy $[a, b]$ intervallumban, és $F(x) = \int_a^x f(u) du$, $a \leq x \leq b$, akkor $f(u) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=u}$

(majdnem) minden $a \leq u \leq b$ pontban. Ha az $f(u)$ függvény integrálható az egész számegegyenesen, akkor a fenti állítás igaz $a = -\infty$ választással is.

Az eloszlásfüggvényekhez hasonlóan pontosan jellemezni lehet a sűrűségfüggvényeket. Ezt a jellemzést adja meg az alábbi tétel.

Tétel. Egy $f(\cdot)$ (mérhető) függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(u) \geq 0$ majdnem minden $-\infty < u < \infty$ számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1$.

Tétel. Jelölje $F(\cdot)$ illetve $f(\cdot)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlás illetve sűrűségfüggvényét. Legyen $g(\cdot)$ mérhető függvény a számegegyenesen. Ekkor

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} uF(du) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u) du$$

és

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u) du$$

Definiáljuk általános (nem feltétlenül diszkrét eloszlású) valószínűségi változók szórásnégyzetét.

Szórásnégyzet definíciója. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyre $E\xi^2 < \infty$. Ekkor ξ valószínűségi változó szórásnégyzete

$$\text{Var } \xi = E(\xi - E\xi)^2$$

(Ha $E\xi^2 = \infty$, akkor vagy nem definiáljuk a ξ valószínűségi változó szórásnégyzetét, vagy azt mondjuk, hogy $\text{Var } \xi(\omega) = \infty$.)

Lemma.

$$\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Néhány fontos folytonos eloszlás.

a.) *Normális eloszlásfüggvény.*

Bevezetjük a standard normális eloszlásfüggvény definícióját. Későbbi eredményekből fog kiderülni, hogy ez az eloszlás miért játszik fontos szerepet a valószínűségszámításban.

A standard normális eloszlás definíciója. A $\Phi(x)$ standard normális eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye a $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$ függvény.

E definíció helyességének igazolásához meg kell mutatni, hogy a fent definiált $\varphi(\cdot)$ függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek érdekében be kell bizonyítani a következő eredményt.

Tétel.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1.$$

Normális eloszlásfüggvény definíciója: Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az $\eta = \sigma\xi + m$ valószínűségi változó, (illetve egy vele azonos eloszlású valószínűségi változó) normális eloszlású valószínűségi változó m és σ^2 paraméterrel. (Később meg fogjuk tárgyalni, hogy m az η valószínűségi változó várható értéke és σ^2 a szórásnégyzete.)

3.) Egy m és σ^2 paraméterű η normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$, $-\infty < u < \infty$

Megoldás: Legyen $\eta = \sigma\xi + m$, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Jelölje $\Phi(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor η eloszlásfüggvénye $G(x) = P(\sigma\xi + m, x) = P\left(\xi < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, sűrűségfüggvénye pedig $g(x) = \frac{d}{dx}G(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\Phi(u)}{du} \Big|_{u=\frac{x-m}{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

Egyenletes eloszlásfüggvény definíciója. Egy ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású egy $[a, b]$ intervallumban, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye $f(u) = \frac{1}{b-a}$, ha $a \leq u \leq b$, és $f(u) = 0$ egyébként.

4.) Számítsuk ki egy az $[a, b]$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás:

$$E\xi = \int_a^b u \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2},$$

$$\text{Var } \xi = E\left(\xi - \frac{b+a}{2}\right)^2 = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} u^2 du$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \frac{2}{3(b-a)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciális eloszlásfüggvény definíciója. Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) =$

$1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, ha $u \geq 0$, $f(u) = 0$, ha $u \leq 0$ alakú.

- 5.) Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^{\infty} u \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{\lambda} \left([-u e^{-u}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-u} du \right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^{\infty} u^2 \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda^2} \left([u^2 e^{-u}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2u e^{-u} du \right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$. *Feladat:*

Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.

- 6.) Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y | \xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \geq 0$ és $y \geq 0$ számra.

Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \geq 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y | \xi > y) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

- 7.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $\eta = a\xi + b$ és $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a

$$G(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right) \text{ függvény, ha } a > 0, \text{ és } G(x) =$$

$$P(\eta < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right), \text{ ha } a < 0. \text{ Innen } \eta \text{ sűrűségfüggvénye}$$

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

A $\zeta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$G(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}),$$

ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}))$.

Házi feladat:

Legyen egy ξ valószínűségi változónak $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Számítsuk ki ξ^3 és ξ^4 sűrűségfüggvényét.