A szeptember 23.-i gyakorlat témája

1. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy nem lesz fejdobás nulla. Annak valószínűsége, hogy legfeljebb 100 fejdobás lesz szintén nulla.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első n dobásban nem lesz fejdobás, azaz csupa írásdobás következik be 2^{-n}. Annak valószínűsége, hogy egyáltalán nem lesz fejdobás megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy minden n számra az első n dobásban nem lesz fejdobás, és ennek valószínűsége kisebb, mint 2^{-n} minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Innen következik, hogy a vizsgált valószínűség nulla. Hasonlóan annak az eseménynek a valósínűsége, hogy az első $100n$ dobásban legfeljebb 100 fejdobás következik be kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy vagy az első 100 sem a 101. és 200. közötti sem az $100(n-1)+1.$ és $100n.$ közötti dobásban nem történik tiszta fejdobás sorozat, és ennek valószínűsége $\left(1-2^{-100}\right)^n$. Ezért annak valószínűsége, hogy egyáltalán nem következik be fejdobás kisebb, mint $\left(1-2^{-100}\right)^n$ minden n számra, tehát nulla.

2. Ledobunk az egység intervallumra egy pontot véletlenül egyenletes eloszlásban, azaz annak valószínűsége, hogy a ledobott pont egy $[a, b]$ intervallumba esik, $[a, b] \subset [0, 1]$ $b - a$-val egyenlő. Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy a ledobott pont pontosan a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik nulla.

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy a ledobott pont a $\frac{\pi}{6}$ pontba esik kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy a ledobott pont a $\left[\frac{\pi}{6} - e, \frac{\pi}{6} + \varepsilon\right]$ intervallumba esik. Ez igaz minden $\varepsilon > 0$ számra. Ez csak úgy lehetséges, ha a vizsgált valószínűség nulla.

Fontos megjegyzés: *Az üres, be nem következő esemény valószínűsége nulla. Az előbb tárgyalt egyszerű feladatok azt mutatják, hogy lehetséges az, hogy egy esemény bekövetkezhet, a valószínűsége mégis nulla. Nagyon fontos, hogy ezt jől megértsük.*

3. Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás a 20. vagy az egyik későbbi dobásban jelenik meg?

   Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 19 dobásban nulla, egy vagy két hatos jelenik meg. Ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{19}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cdot \frac{1}{6} + \binom{19}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

   második megoldás: Ez azt jelenti, hogy a harmadik hatos dobás eredménye a 20, 21, 22 vagy valamelyik későbbi dobás eredménye. (Tudni kell, hogy egy valószínűséggel előbb-utóbb megjelenik a harmadik fej-dobás.) Ennek valószínűsége

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \sum_{k=20}^{\infty} \binom{k-1}{2} \left(\frac{5}{16}\right)^{k-3}.$$

Annak érdekében, hogy megértsük az első megoldás jogosságát lássuk be, hogy

3a. Annak, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni feldobása során nem jelenik meg három hatos nulla a valószínűsége. Valójában ennek a feladatnak a megoldása hasonló az első feladat megoldásához, de leírom.

Megoldás: Az állítás ekvivalens azzal, hogy annak valószínűsége, hogy bekövetkezik legaláb három hatos dobás 1. Ez utóbbi esemény valószínűsége viszont nagyobb mint az, hogy (akárhogyan is rögzítünk egy n egész számot) annak valószínűsége, hogy az első n dobás közül legalább egy hatos, az $n+1$-ik és $2n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos és a $2n+1$-ik éa $3n$-ik dobás közötti dobások közül legalább az egyik hatos. Ennek valószínűsége viszont $\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^3$. Ezért a vizsgált valószínűség ennél a számnál nagyobbnak kell lenni tetszőleges n-re, ami csak úgy lehetséges, hogy ez a valószínűség 1.

Felmerülhet az a kérdés, hogy hogyan lehet megmutatni valószínűségi meggondolások nélkül azt, hogy az előbb tárgyalt feladat két megoldásában szereplő két látszólag teljesen különböző kifejezés megegyezik. Megmutatom, hogy hogy a második összegben szereplő végtelen összeg összegezhető a $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, ha $|x|<1$ aonosság segítségével, ahol $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α számra érvényes, tekinthető úgy mint az általánosított binomiális tétel, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Azt kell észrevenni, hogy

$$\binom{k-1}{2} = \frac{(2-k)(1-k)}{2} = (-1)^{k-1}\frac{(-3)(-4)\cdots(1-k)}{(k-3)!} = (-1)^{k-1}\binom{-3}{k-3},$$

ahonnan $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\binom{k-1}{2}\left(\frac{5}{16}\right)^{k-3} = \sum\limits_{k=3}^{\infty}\binom{-3}{k-3}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k-3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}\left(-\frac{5}{16}\right)^{k} = \left(1-\frac{5}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$.

4. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót visszatevéssel. Mi annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a második húzás piros? Annak, hogy az ötödik húzás piros? Annak, hogy az első és második húzás piros? Annak, hogy a második és ötödik húzás piros?

Megoldás: Minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki, húsz piros és harminc fehér golyó közül választhatunk. Ezért annak a valósínűsége, hogy az első húzás eredménye piros ezért $\frac{20}{30}$. Ugyanez a valószínűsége annak, hogy a második vagy annak a valószínűsége, hogy az ötödik húzás piros szintén $\frac{20}{50}$, ugyanis mindegyik esetben 50 golyóból kell kiválasztanunk 20-t, mindegyik golyó húzása egyforma valószínű. Hasonlóan látható, hogy annak valószínűsége, hogy az első és második húzás piros, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, és ugyanez annak a valószínűsége, hogy a második és ötödik húzás piros.

Az előző feladat számunkra elsősorban azért érdekes, mert párhuzamba állítható a következő feladattal.

5. Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót visszatevés nélkül. Mi annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros? Mi annak a valószínűsége, hogy a második húzás piros? Annak, hogy az ötödik húzás piros? Annak, hogy az első és második húzás piros? Annak, hogy a második és ötödik húzás piros?

   Megoldás: Annak valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50}$, annak a valóazínűsége, hogy az első és második húzás piros $\frac{20}{50}\frac{19}{49}$. Ez hasonlóan látható, mint az előző feladat megoldása. Annak valószínűsége, hogy a második húzás piros megegyezik annak a valószínűségével, hogy vagy az első húzás piros és a második húzás piros vagy az első húzás fehér és a második hűzás piros. Ennek valószínűsége $\frac{20}{50}1949+\frac{30}{50}\frac{20}{49}=\frac{20(19+30)}{50\cdot 49}=\frac{20}{50}$. Ez azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a második húzás piros megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros. Annak valószínűsége, hogy a második és ötödik húzás megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és a második húzás piros. Ez belátható hasonlóan az előző számoláshoz, de ez kissé bonyolult. Megmutatjuk, hogy az események halmazokkal való reprezentációjával ez a feladat egyszerűbben megoldaható.

5a.) Vezessük be a következő eseményeket az előző feladatban: Legyen $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm 1$, $1\le j\le 10$ az az esemény, amelyik akkor következik be, ha a 10 házás során a j-ik húzás piros, ha az ε_j koordináa 1, és a j-ik húzás fehér, ha a j-ik húzás fehér. Ezt az előírást minden $1\le j\le 10$ indexre megk0veteljük. Lássuk be, hogy ilyen módon a valószínűségi mező egy 2^{10} elemű particióját definiáltuk, az az esemény, hogy a második és ötödik húzás piros megegyezik az $\bigcup\limits_{\varepsilon_2=1.\varepsilon_5=1} A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$ esenénnyel, az az esemény pedig, hogy az első és második hízás piros megegyezik az $\bigcup\limits_{\varepsilon_1=1.\varepsilon_2=1} A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$ esenénnyel. Mutassuk meg, hogy az $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm 1$, esemény valószínűsége csak az esemény definiciójában szereplő $\varepsilon_j=1$ és $\varepsilon_j=-1$ koordináták számától függ, de független azok sorrendjétől. Lássuk be ezen észrevételek segítségével az 5. feladat hiányzó részét.

   Megoldás: Mutassuk meg, hogy az $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm 1$, események nyilvánvalóan diszunktak külünbözőek különböző koordináták esetén, uniójuk pedig a biztos esemény, hiszen tartalmazzák a 10 hosszíságú húzássorozat összes lehetséges kimenetelét. Ez jelenti azt, hogy a felsorolt halmazok particiót alkotnak. Az, hogy az adott kifejezések a második és ötödik húzásban történt piros húzás illetve az első és második húzásban történt piros húzást jelent hasonlóan látható. Annak valószínűsége, hogy egy olyan $A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j=\pm 1$ esemény következik be, amelynek koordinátái l piros és $10-l$ fehér húzást tartalmaznak egyenlő a

$$P(l)=\frac{20\cdot 19\cdots(20-l+1)\cdot 30\cdot 29\cdots(30-(10-l)+1)}{50\cdot 49\cdots 41}$$

   kifejezéssel, hiszen amikor kiszámoljuk ezt a valőszínűséget ez a kifejezés jelenik meg, az ε_j-k sorrendje csak a számlálóban szereplő tényezők sorrendjének megjelenését befolyásolja. Vegyük észre, hogy amennyiben a második és ötödik húzás piros akkor az, hogy összesen l piros húzás következik be $\binom{8}{l-2}$ $A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{10})$, $\varepsilon_j = \pm 1$ esemény bekövetkezésekor történik meg, amelyek mindegyikének valószínűsége $P(l)$. Ezért annak a valószínűsége, hogy a második és ötödik húzás piros és összesen l piros húzás következik be $\binom{8}{l-2}P(l)$, annak valószínűsége pedig, hogy a második és ötödik húzás piros $\sum\limits_{l=0}^{8} \binom{8}{l-2}P(l)$. Hasonló módon annak a valószínűsége, hogy az első és második hűzás piros $\sum\limits_{l=0}^{8} \binom{8}{l-2}P(l)$, tehát a két valószínűség megegyezik. A feladat további állításai hasonlóan láthatóak.

Házi feladat:

Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk egymás után 10 golyót úgy hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt visszadobunk két ugyanolyan színű golyót. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első és második kihúzott golyó piros megegyezik annak a valósínűségével, hogy a második és ötödik kihúzott golyó piros.

6. Legyen adva végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény. Fejezzük ki ezen események segítségével az únió, metszet és komplementer leképezések felhasználásával azt az eseményt, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események közül végtelen sok következik be.

   Megoldás: Az az esemény, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események közül végtelen sok következik be úgy is megfogalmazható, hogy bármely n indexre létezik olyan $N \geq n$ index melyre az A_N esemény bekövetkezik. Rögzített n számra az az esemény, hogy bekövetkezett az A_N esemény valamely $N \geq n$ indexre felírható mint a $B_n = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_N$ esemény. Az, hogy a B_n események mindegyike bekövetkezik az $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ esemény. Ezért a vizsgált esemény felí4ható $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_N \right)$ alakban írható.

   Házi feladat:

   Fejezzük ki unió, metszet és komplementerképzés segítségével azt az eseményt, hogy végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ események közül véges sok kivételével mindegyik bekövetkezik.

7. Adjunk valószínűségi modellt a negyedik és ötödik feladatban szereplő feladatra.

   Megoldás: Tekintsük azt az Ω halmazt, amelynek ω elemi eseményei a lehetséges húzássorozatok halmaza, azaz ω egy tíz hosszúságú fej-írás sorozat. Ω, a biztos esemény, az összes lehetséges húzássorozatot tartalmazó halmaz, $\mathcal{A}$ pedig az Ω összes lehetséges részhalmazából álló σ-algebra. Adva egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz, ennek $P(A)$ valószínűsége egyenlő a $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ összeg értékével. Eddig a pontig a visszatevéses és visszatevés nélküli húzássorozatot leíró modell definiciója megegyezik. A különbség akkor jelenik meg, amikor az elemi események $P(\{\omega\})$

valószínűségét definiáljuk. Ez abban az esetben, ha az ω húzássorozat l piros és $10-l$ fehér húzást tartalmaz, akkor a visszatevéses esetben $P(\{\omega\}) = \bar{P}(l) = \left(\frac{2}{5}\right)^l \left(\frac{3}{5}\right)^{10-l}$, míg a visszatevés nélküli esetben

$$P(\{\omega\}) = P(l) = \frac{20 \cdot 19 \cdots (20-l+1) \cdot 30 \cdot 29 \cdots (30-(10-l)+1)}{50 \cdot 49 \cdots 41}.$$

Ha marad még idő, megtárgyaljuk a következő feladatot is.

8. Adjunk valószínűségszámítási modellt egy szabályos kocka végtelen dobássorozatára.