A szeptember 30.-i gyakorlat témája

Először felidézem azt, amit a valószínűségszámítás modelljéről a múlt órán elmondtam, mert ennek megértése hasznos lehet a továbbiakban. Azt kell jól megérteni, hogy milyen módon azonosítunk a valószínűségszámításban eseményeket halmazokkal.

Vezessük be az úgynevezett elemi eseményeket, amelyeket általában ω-val jelölünk, és amelyeket úgy képzelhetünk el, mint a lehetséges kimeneteket vagy az összes lehetséges körülmények megadását, amelyek meghatározzák az események kimenetelét. Egy esemény azt jelenti, hogy az elemi események valamilyike bekövetkezik, azaz bizonyos elemi események halmaza következik be. Ez azt jelenti, hogy adva van bizonyos elemi események ω rendszere, egy esemény bizonyos ω-kból álló halmaz, a biztos esemény az összes ω-t tartalmazó halmaz. Ezt szokás Ω-val jelőlni. Az események az Ω részhalmazai. Nagyon fontos definiálni az A események $P(A)$ valószínűségét definiálni. Vegyük észre, hogy ha tekintjük bizonyos eseményeknek megfelelő halmazokat, akkor annak az eseménynek, hogy ezek események valamelyike bekövetkezik megfelel a neki megfelelő halmazok uniója, annak az eseménynek, hogy ezek mindegyike bekövetkezik az eseményeknek megfelelő halmazok uniója felel meg.

Megtárgyaltuk a következő feladatot

0.) Egy szabályos pénzdarabot feldobunk 20 alkalommal. Adjuk meg ennek egyik lehetséges valószínűségi modelljét.

Megoldás: Legyenek az elemi események az összes $\omega = (F, I, \dots)$ lehetséges 20 hosszúságú fej-írás sorozatot. Legyen Ω az összes 20 hosszúságú sorozatok halmazát, és $\mathcal{A}$ az Ω összes lehetséges részhalmaza. Definiáljuk az $\{\omega\}$ elemi eseményeket tartalmazó halmazok valószínűségét $P(\{\omega\}) = 2^{-20}$ az összes lehetséges elemi eseményre. (Ez jelenti azt, hogy szabályos érmét dobtunk fel egymástól függetlenül.) Általában pedig legyen $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

Az előző módon konstruálhatunk valószínűségi modelleket abban az esetben, ha véges (vagy megszámlálhatóan végtelen) lehetséges kimenete van egy kisérletnek. De ha a lehetséges kimenetek száma megszámlálhatónál is több akkor komoly elvi nehézségek lépnek fel. Ez a probléma természetes feladatokban is felmerül, például akkor, ha egy szabályos péndarab végtelen sok egymástól független feldobását tekintjük. Ebben az esetben is természetes módon (a véges sok kimenethez) hasonlóan definiálhatjuk az elemi eseményeket, de az események valószínűségének definiciójában komoly problémák merülnek fel. Legyenek az ω elemi események a végtelen fej-írás sorozatok halmaza, az elemi események valószínűsége nulla. Az események bizonyos elemi eseményeket tartalmazó halmazok. Ezek valószínűségét viszont nem tudjuk olyan egyszerűen definiálni, mint a véges esetben. Egy tipikus esemény (halmaz) ugyanis kontinum sok elemi eseményt tartalmaz, és nem magától értetődő az, hogy hogyan definiáljuk az ilyen események valószínűségét.

1. Adjunk valószínűségszámítási modellt egy szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatára.

Megoldás: Legyenek az ω elemi események a végtelen fej-íráa sorozatok halmazai, az Ω biztos esemény az összes lehetséges fej-írás sorozatot tartalmazó halmaz. Definiáni kell az eseményeket és azok vakószínűségét. Az események az Ω halmaz részhalmazai. Bizonyos halmazok valószínűségét természetes módon definiálhatjuk. Tekintsük azt a halmazt, amelyik az összes olyan fej-írás sorozatot tartalmazza, amelyiknek az első n eleme elő van írva. Az ilyen halmazok valószínűsége 2^{-n}. Ez annak felel meg, hogy az első n dobás eredményét előírjuk. Továbbá elvárjuk, hogy amennyiben bizonyos diszjunkt események valószínűségét definiáljuk akkor ezen uniójának is definiáljuk a valószínűségét, mint az egyes események valószínűségének az összegét. Ilyen módon nem definiáljuk minden esemény valószínűségét, de az összes számunkra érdekes esemény valószínűségét ilyen módon definiáltuk. Továbbá ez a definició értelmes, azaz egy esemény valószínűségének a definiciója, amelyet különböző módon állíthatjuk elő, nem függ az előállítástól. Továbbá ilyen módon egy úgynevezett σ-algebrán definiáltuk a valószínűséget, ami σ-additív. E fogalmak definiciója szerepelt az előadáson, ezért ennek tárgyalását nemm részletezem. Viszont megjegyzem, hogy itt olyan elméleti eredményeket használunk fel, amelyek vizsgálata alapos ismereteket és nehéz bizonyításokat igényelnek. De ennek tárgyalása nem témája a mi gyakorlatunknak. Elég elfogadni azt a tényt, hogy minden értelmes konstrukcióban teljesülnek a valószínűségszámítás alapvető tulajdonságait előíró feltételek.

Egy fontos fogalom a feltételes valószínűség fogalma. Szemléletesen a következőről van szó. Egy A esemény $P(A)$ valószínűsége azt fejezi ki, hogy mennyire valószínű a bekövetkezése. Viszont ennek a bizonyosságnak a mértéke megváltozik, ha tudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett. Ezéert definiájuk az A esemény feltételes valószínűségét, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezett. Ennek definiciója $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Bár az alábbi azonosság triviális, fontossága miatt érdemes külön megfogalmazni.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(B), \quad \text{ha } P(A) > 0 \text{ és } P(B) > 0.$$

További egyszerű, de hasznos észrevételek:

Ha $B_1, \dots, B_n$ a valószínűségi mező egy particiója, azaz a $B_1, \dots, B_n$ események diszjunktak, és $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \Omega$, akkor

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

minden A halmazra. Ezért

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}.$$

Természetesen hasonló összefüggés írható fel a $P(B_j|A)$ feltételes valószínűségre tetszőleges j indexre. A fenti egyszerű összefüggés fontosságát az adja, hogy lehetővé teszi a $P(B_j|A)$ feltételes valószínűségek kiszámítását a 'fordított' $P(A|B_j)$ valószínűségek ismeretében, feltéve, hogy ismerjük a $P(B_j)$ valószínűségeket.

2. Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a megfelelőt) p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy helyes választ adott?

   Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a helyes választ, B azt az eseményt, hogy helyes választ ad. A $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Ekkor $P(A \cap B) = P(A) = p$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(A) + (1 - P(A))P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3} = p + \frac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B) = \frac{p}{p + \frac{1}{3}(1-p)}$.

3.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

   Megoldás: Kiszámoltuk annak valószínűséségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy elótte Z, Z és annak feltételes valószínűségét, hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z, Z, Z húzás volt. Ez a valószínűség, illetve feltételes valószínűségek $\frac{z}{z+s}$, $\frac{z}{z+s+2}$, $\frac{z}{z+s+4}$, $\frac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\frac{z}{z+s} \cdot \frac{z}{z+s+2} \cdot \frac{z}{z+s+4} \cdot \frac{s+6}{z+s+6}$.

4.) Reggel valaki hazulról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

   Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2, hogy a nadrág és A_3, hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem veszett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$ továbbá $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$ és $P(B|A_3) = 1$. Vezessük be a $C = (\bar{B} \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_2) \cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C) = P(A_1 \cap \bar{B}) + P(A_2 \cap \bar{B}) + P(A_3) = P(\bar{B}|A_1)P(A_1) + P(\bar{B}|A_2)P(A_2) + P(A_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.31$, és $P(B \cap C) = P(B \cap A_3) = P(A_3) = 0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\dfrac{0.2}{0.31} = \dfrac{20}{31}$.

5.) A Fazekas könyv egyik feladata (3.4 Példa a 32. oldalon) arról szól, hogy ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír. Heurisztikusan úgy érvelhetűnk, hogy ha a legjobb diák dolgozatot ír, akkor annak (feltételes) valószínűsége, hogy a legrosszabb diák is dolgozatot ír, azzal egyenlő, hogy a maradék $n-1$ diák közül őt is kiválasztják a maradék $r-1$ dolgozatíró közé, tehát $\dfrac{r-1}{n-1}$. Kissé pontosabban, annak valószínűsége, hogy mind a ketten dolgozatot írnak, $\dfrac{r(r-1)}{n(n-1)}$, annak, hogy a legjobb diák dolgozatot ír $\dfrac{r}{n}$, ahonnan következik az állítás. Ha a könyvben szereplő eredményt egyszerűbb alakra hozzuk, látjuk hogy az eredmény helyes. Adjunk közvetlen, a szemléletet követő precíz bizonyítást arra, hogy a fenti formulák az adott valószínűségekre helyesek.

Megoldás: Az urna visszatevés nélküli húzás modelljének érvelését alkalmazhatjuk ebben az esetben is. Tegyük fel, hogy egymás után kiválasztjuk a dolgozatot írókat, Minden lépésben az eddig ki nem választottak valamelyikét választjuk ki egforma valószínűséggel. Ha kijelüljük (az urnából való húzásnál szereplő érvelést használva) egy külön (egy elemű) csoportba a legjobb, egy külön (egy elemű) csoportba a legrosszabb diákot, egy külön csportba az összes többit, akkor rögzítve egy $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$ számpárt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik választásnál választunk az első, a k-ik választáskor a második csoportból, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első választáskor választunk az első és a második választáskor a második csoportból. Ennek valószínűsége viszont $\dfrac{1}{n(n-1)}$. Mivel a fenti események különböző (j,k) számpárokra kizárják egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a legjobb és alegrosszabb diák is dolgozatot ír $\dfrac{r(r-1)}{n(n-1)}$. Hasonlóan, látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a legjobb diák dolgozatot ír az $\dfrac{r}{n}$ számmal egyenlő.

6.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2|A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

A következő (egyszerű) feladat célja az, hogy összehasonlítsuk annak eredményét az előbb tárgyalt feladattal, és megbeszéljük mást jelent az a feltételt, hogy két kockadobás közül az egyik hatos, és az hogy adódott hatos dobás. Képesek vagyunk-e szemléletünk alapján számolás nélkül megmondani, melyik feltevés mellett nagyobb annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos?

7.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos, feltéve hogy az első dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, A_2 pedig azt az eseményt, hogy a második dobás hatos. Ekkor $A_1 \cap A_2$ az az esemény, hogy mind a két dobás hatos, és minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Viszont, $P(A_1 \cap A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk háromszor egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a három dobás fej, feltéve, hogy legalább két fejdobás történt?