Az április 13.-i gyakorlat feladatai

1.) Legyen adva egy ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlás, $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, M várható értékkel és D^2 szórásnégyzettel. Legyenek a és b valós számok. Számoljuk ki az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$, várható értéke $E\eta = E(a\xi + b) = aE\xi + b = aM + b$, $\mathrm{Var}\,\eta = \mathrm{Var}\,(a\xi + b) = a^2 \mathrm{Var}\,\xi$.

2.) Az előző gyakorlaton tárgyaltuk annak a feladatnak a megoldását, hogy mennyi egy az $[a, b]$ intervallumban egyenletes eloszlású η valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete. Lássuk be, hogy egy ilyen valószínűségi változó felírható $\eta = (b - a)\xi + \frac{a+b}{2}$ alakban, ahol ξ egyenletes eloszlású a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumban. Adjunk a feladatra ezen észrevétel alapján egyszerűbb megoldást.

Megoldás: Az η és ξ valószínűségi változók között megfogalmazott kapcsolat átfogalmazható úgy is, hogy ha ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $[a, b]$ intervallumon, akkor $\xi = \frac{\eta - \frac{a+b}{2}}{b-a}$ egyenletes eloszlású a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumon. Az, hogy η egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon úgy is megfogalmazható, hogy η $g(x)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{b-a}$, ha $a \le x \le b$, és $g(x) = 0$, ha $x < a$ vagy $x > b$. Innen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = g\left(\left(x + \frac{a+b}{2(b-a)}\right)(b - a)\right)$, és némi számolással látható, hogy $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$, ha $x < -\frac{1}{2}$ vagy $x > \frac{1}{2}$. Innen $E\xi = \int_{-1/2}^{1/2} x\,dx = 0$, $\mathrm{Var}\,\xi = E\xi^2 = \int_{-1/2}^{1/2} x^2\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} = 2\cdot\dfrac{1}{3\cdot 8} = \dfrac{1}{12}$. Innen $E\eta = (b-a)E\xi + \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$, és $\mathrm{Var}\,\eta = \mathrm{Var}\,((b-a)\xi + \frac{a+b}{2}) = (b-a)^2 \mathrm{Var}\,\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Felidézzük a következő fontos fogalmat:

A standard normális eloszlás definiciója. *A $\Phi(x)$ standard normális eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye a $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, függvény.*

E definició helyességének igazolásához meg kell mutatni, hogy a fent definiált $\varphi(\cdot)$ függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek érdekében be kell bizonyítani a következő eredményt.

Tétel.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 1.$$

Ennek a korántsem triviális összefüggésnek a bizonyítása az előadáson szerepelt. A standard normális eloszlás elnevezésben a standard jelző arra utal, hogy egy $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értéke nulla és szórásnégyzete 1.

3.) Lássuk be, hogy egy $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó várható értéke nulla és szórásnégyzete 1.

Megoldás: Valóban $E\xi = 0$, mert $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$, és ez az integrál nulla, mert az integrandus páratlan függvény. Ezután parciális integrálással kapjuk $f(x) = x$ és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ választással, hogy

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2e^{-x^2/2}\,dx = \left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

Innen $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1$.

Házi feladat:

Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\sigma|}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

A fenti feladat eredménye alapján egy valószínűségi változót akkor nevezünk normális eloszlásúnak, ha van sűrűségfüggvénye, és az $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$ alakban adható meg alkalmas m és $\sigma > 0$ számokkal.

4.) Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor$E\xi^{2k-1} = 0$, $E\xi^{2k} = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra.

Megoldás: Egyrészt

$$E\xi^{2k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = 0,$$

mert az $x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ függvény páratlan, és páratlan függvény integrálja nulla. Másrészt

$$\begin{aligned}
E\xi^{2k} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} -x^{2k-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx\right)\\
&= \left[-x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}(2k-1)x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx\\
&= (2k-1)\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = (2k-1)E\xi^{2k-2},
\end{aligned}$$

ahonnan k szerinti teljes indukcióval $E\xi^{2k} = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra.

5.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1, 1]$ intervallumban, azaz legyen sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$. Számoljuk ki az $\eta = \xi^4$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Első megoldás: $E\eta = E\xi^4 = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$, és $\operatorname{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2$, $E\eta^2 = E\xi^8 = \int_0^1 x^8\,dx = \left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}$. Innen $\operatorname{Var}\eta = \frac{1}{9} - \frac{1}{25} = \frac{16}{225}$.

Második megoldás: Számoljuk ki az η valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét, és használjuk az $E\eta = \int xg(x)\,dx$ és $E\eta^2 = \int x^2 g(x)\,dx$ összefüggést. Számoljuk ki először η $G(x)$ eloszlásfüggvényét. $G(x) = P(\eta < x) = P(\xi^4 < x) = P(\xi < x^{1/4}) = x^{1/4}$ ha $0 \le x \le 1$, $G(x) = 0$, ha $x < 0$ és $G(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen $g(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$, és $g(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, ha $0 \le x \le 1$. Innen $E\eta = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot x^{-3/4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot x^{1/4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$, $E\eta^2 = \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 \cdot x^{-3/4}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot x^{5/4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{1}{9} - \frac{1}{25} = \frac{16}{225}$.

6.) Ledobnak egy pontot a $[0,2]$ intervallumra egyenletes eloszlással. Ha a ledobott pont értéke a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a dobás pontos értékét egy jegyzőkönyvbe. Ha a ledobott pont értéke az $[1,2]$ intervallumba esik, akkor az 1 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Számoljuk ki a jegyzőkönyvbe írt (véletlen) szám várható értékét és szórásnégyzetét.

Első megoldás: Jelölje ξ a ledobott pont, η a jegzőkönyvbe írt szám értékét. Ekkor $\eta = u(\xi)$ ahol az $u(x)$ függvényt úgy definiáljuk, hogy $u(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $u(x) = 1$, ha $1 \le x \le 2$, az $u(x)$ függvényt tetszőleges módon definiálhatjuk, ha $x < 0$ vagy $x > 2$. Ekkor $E\eta = Eu(\xi) = \int u(x)f(x)\,dx = \int_0^2 u(x)\frac{1}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, ahol $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Hasonlóan, $E\eta^2 = Eu^2(\xi) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, és $\operatorname{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{2}{3} - \frac{9}{16} = \frac{5}{32}$.

Második megoldás: Jelölje $G(x)$ az η valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor $E\eta = \int xG(\,dx)$, $E\eta^2 = \int x^2 G(\,dx)$, és azt kell megértenünk, hogyan tudjuk ezeket az integrálokat kiszámolni. Vegyük észre, hogy $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$, ahol $G_1(x) = \int_{-\infty}^x g_1(u)\,du$, $g_1(u) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le u \le 1$, $g_1(u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $u > 1$, és $G_2(x) = 0$, ha $x \le 1$, $G_2(x) = \frac{1}{2}$, ha $x \ge 1$. Ez azt jelenti, hogy G_1 hasonlóan viselkedik, mint egy sűrűségfüggvénnyel rendelkező, G_2 pedig, mint egy diszkrét (ebben a speciális esetben egyetlen értéket felvevő) valószínűségi változó eloszlásfüggvényéhez. Az egyetlen különbség az, hogy nincsenek 1-re normálva, azaz $G_1(\infty) = \frac{1}{2}$ és $G_2(\infty) = \frac{1}{2}$ (és nem 1). A tanult képletek ebben az esetben is érvényesek és tetszőleges $v(x)$ függvény integráljára felírhatjuk, hogy

$$\int v(x)G(\,dx) = \int v(x)G_1(\,dx) + \int v(x)G_2(\,dx) = \int_0^1 v(x)\frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}v(1).$$

Innen $v(x) = x$ illetve $v(x) = x^2$ választással $E\eta = Eu(\xi) = \int xG(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx + \frac{1}{2} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, és $E\eta^2 = \int x^2 G(\,dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, $\operatorname{Var}\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{2}{3} - \frac{9}{16} = \frac{5}{32}$.

Tárgyaljuk a Poisson eloszlást, illetve mutassuk meg egy feladatban annak egy fontos tulajdonságát, nevezetesen azt, hogy két független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson eloszlású.

Poisson eloszlás definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha ξ nem negatív egész értékeket vesz fel, és*

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

7.) Lássuk be, hogy ez valóban valószínűség eloszlás.
Megoldás: Azt kell ellenőrizni, hogy $P(\xi = k) \geq 0$ minden k értékre, ami nyílvánvaló, és $\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = 1$. Viszont

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

8.) Ha ξ és η két független, λ illetve μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi + \eta$ egy $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.
Megoldás:

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j) P(\eta = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{(k-j)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k. \end{aligned}$$