DOLGOZAT FELADATOK

1.) Minden héten kitöltünk egy lottószelvényt. (90 számból kell eltalálni 5-öt.) Mi annak a valószínűsége, hogy a hatodik héten lesz először 2 találatunk?

2.) Egy urnában 10 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 20 golyót visszatevés nélkül. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

3.) Feldobunk három szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy legalább az egyik dobás nem hatos feltéve, hogy van hatos dobás.

4.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,2]$ intervallumon, azaz essen az értéke egy valószínűséggel a $[0,2]$ intervallumba, és legyen annak a valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó egy $[a,b]$ intervallumba esik, $0 \le a < b \le 2$, $\frac{b-a}{2}$. Számítsuk ki a ξ^6 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

5.) Legyen A, B és C három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek az események (teljesen) függetlenek?

MEGOLDÁSOK

1.) Annak valószínűsége, hogy valamelyik héten lesz 2 találatunk $\frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}$. Azok az események, hogy az egyes heteken lesz-e 2 találatunk egymástól függetlenek. Így annak a valószínűsége, hogy az első 5 hét során nem lesz 2 találatunk $\left(1-\frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^5$. Annak valószínűsége pedig, hogy az első 5 héten nem lesz 2 találatunk, a hatodik héten pedig lesz $\left(1-\frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^5 \frac{\binom{85}{3}\binom{5}{2}}{\binom{90}{5}}$.

2.) Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, amely 1, ha a j-ik húzás piros és nulla, ha a j-ik húzás fehér, $1 \le j \le 20$. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzet érdekel. $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = 0) = \frac{10}{40}$, minden $1 \le j \le 20$ számra, és innen $ES = \sum\limits_{j=1}^{20} E\xi_j = 20\frac{1}{4} = 5$. A szórásnégyzet kiszámolására az $\operatorname{Var} S = \sum_{j=1}^{10} \operatorname{Var} \xi_j + 2\sum_{j=1}^{19}\sum_{k=j+1}^{20} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k)$ azonosságot alkalmazhatjuk. $\operatorname{Var} \xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. A $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k$ kiszámításához vegyük észre, hogy $E\xi_j\xi_k = P(\xi_j = 1, \xi_k = 1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{1}{4}\frac{9}{39} = \frac{3}{52}$ minden $1 \le j,k \le 20$, $j \ne k$ számpárra. Innen $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{3}{52} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{208}$, $\operatorname{Var} S = 20 \cdot \frac{3}{16} - 20 \cdot 19 \cdot \frac{1}{208} = \frac{25}{13}$.

3.) Jelölje A azt az eseményt, hogy van hatos dobás és B azt az eseményt, hogy nem mindegyik dobás hatos. Ekkor a $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ feltételes valószínűséget kívánjuk kiszámítani. $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$, mert A annak az eseménynek a komplementere, hogy egyik dobás sem hatos. Az $A \cap B$ az az esemény, hogy vagy pontosan 1 vagy pontosan két hatos dobás történt. Ennek valószínűsége $3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{90}{216}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{90}{91}$.

4.) A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = 0$, ha $x < 0$, $F(x) = \frac{x}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, $F(x) = 1$, ha $x \ge 2$, és ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 2$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$. Innen $E\xi^6 = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{64}{7}$, $\operatorname{Var}\xi^6 = E(\xi^6)^2 - \left(E\xi^6\right)^2 = E\xi^{12} - \left(E\xi^6\right)^2$ és $E\xi^{12} = \int x^{12} f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^{12}\,dx = \left[\frac{x^{13}}{26}\right]_0^2 = \frac{4096}{13}$. Innen $\operatorname{Var}\xi^6 = \frac{4096}{13} - \frac{4096}{49} = \frac{147\ 456}{637}$.

Második megoldás: Számítsuk ki az $\eta = \xi^6$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét. Ennek érdekében számítsuk ki először annak $G(x)$ eloszlásfüggvényét. $G(x) = P(\xi^6 < x) = P(\xi < x^{1/6})$, ha $x > 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen $G(x) = 0$, ha $x < 0$, $G(x) = \frac{x^{1/6}}{2}$, ha $0 \le x \le 64$, $G(x) = 1$, ha $x > 64$. Ezért η sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{12}x^{-5/6}$, ha $0 \le x \le 64$, és $g(x) = 0$, ha $x \le 0$ vagy $x > 64$. Innen $E\eta = \int_0^{64} x \cdot 6x^{-5/6}\,dx = \left[\frac{x^{7/6}}{14}\right]_0^{64} = \frac{2^7}{14} = \frac{64}{7}$, $E\eta^2 = \int_0^{64} x^2 \cdot \frac{1}{12}x^{-5/6}\,dx = \left[\frac{x^{13/6}}{26}\right]_0^{64} = \frac{2^{12}}{13} = \frac{4096}{13}$ és $\operatorname{Var}\eta = \frac{4096}{13} - \frac{4096}{49} = \frac{147\ 456}{637}$.

5.) Az A, B és C események akkor függetlenek, ha teljesítik a következő azonosságokat: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ és $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.