DOLGOZAT FELADATOK

1. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, melyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$ és $\lambda \neq \mu$. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét.
2. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100 alkalommal egymástól függetlenül. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, hogy hány egymást követő különböző eredményű dobás jelenik meg ebben a dobássorozatban, azaz hány olyan egymást követő dobásból álló dobáspárt tartalmaz ez a sorozat, amelyikben fej-írás vagy írás-fej jelenik meg. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
3. Ledobunk a $[0,3]$ intervallumra egy pontot egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pont egy valószínűséggel a $[0,3]$ intervalumba esik, és annak valószínűsége, hogy egy $[a,b] \subset [0,3]$ alakú intervallumba esik $\frac{b-a}{3}$. Ha egy pont a $[0,1]$ intervallumba esik, akkor felírjuk a ledobott pont helyének pontos értékét egy jegyzőkönyvbe, ha a pont az $(1,2]$ intervalumba esik, akkor az 1 számot, ha pedig a $(2,3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Számítsuk ki a jegyzőkönyvbe írt (véletlen) szám várható értékét és szórásnégyzetét.
4. A következő játékot játsszuk. Két szabályos pénzdarabot feldobnak egymás után 10 000 alkalommal. Ha egy dobás eredménye két fejdobás akkor 2 forintot nyerünk, ha az eredmény két írásdobás akkor 2 forintot vesztünk, ha az eredmény egy fej és egy írásdobás akkor 1 forintot nyerünk. Adjunk jó becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat alapján annak a valószínűségére, hogy nyereményünk összege 4850 és 5300 forint között lesz.
5. Az alábbi négy állítás közül melyik helyes és melyik nem:
   a.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
   b.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
   c.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi+\eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\mathrm{Var}\,(\xi + \eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$.
   d.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\mathrm{Var}\,(\xi + \eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$.

MEGOLDÁSOK

1. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-y)\, du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért ebben az esetben a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x - u < 0$, azaz $u \geq x$. Innen

$$f * g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\, du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\, du, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f * g(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \left[e^{-(\lambda-\mu)u} \right]_0^x = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \quad \text{ha } x \geq 0 \text{ és } \lambda \neq \mu.$$

2. Jelölje ξ_j azt a valószínűségi változót, amelyikre $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás fej, a $j+1$-ik dobás írás vagy a j-ik dobás írás és a $j+1$-ik dobás fej, $\xi_j = 0$, ha a mind a j-ik mind a $j+1$-ik dobás fej, vagy mind a j-ik mind a $j+1$-ik dobás írás, $1 \leq j \leq 99$. Ekkor minket a $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $1 \leq j \leq 99$, ezért $S = \frac{99}{2}$. Továbbá $\operatorname{Var} \xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{1}{4}$, $1 \leq j \leq 99$, és ξ_j, $\xi_{j'}$ függetlenek, ha $|j - j'| \geq 2$, ezért ebben az esetben $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_j') = 0$, továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1}) = E\xi_j\xi_{j+1} - E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, mert $\xi_j\xi_{j+1} = 1$ ha FIF vagy IFI dobássorozat jelenik meg a j-ik, $j+1$-ik $j+2$-ik dobásban, és mind a két sorozat valószínűsége $\frac{1}{8}$. Innen a $\operatorname{Var} S = \frac{99}{4}$.

3. Jelölje a ξ valószínűségi változó a ledobott pont helyét. Ennek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{3}$, ha $0 \leq x \leq 3$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 3$. Továbbá, ha bevezetjük az $u(x)$ függvényt, amelyre $u(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 1$, $u(x) = 1$, ha $1 \leq x \leq 2$ és $u(x) = 2$, ha $2 \leq x \leq 3$, akkor az $\eta = u(\xi)$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Ekkor $E\eta = Eu(\xi) = \int u(x)f(x)\, dx = \int_0^3 u(x)\frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\, dx + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$, $E\eta^2 = Eu(\xi)^2 = \int u^2(x)f(x)\, dx = \int_0^3 u^2(x)\frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2\, dx + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$. Innen $\operatorname{Var} \eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{16}{9} - \frac{49}{36} = \frac{5}{12}$.

4. Jelölje ξ_j a j-ik játékban szerzett nyereményünk értékét, és legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10\ 000} \xi_j$. Ekkor minket a $P(4850 < leS < 5300)$ valószínűség értéke érdekel. Számítsuk ki a független és egyforma eloszlású ξ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $P(\xi_j = 2) = P(\xi_j = -2) = \frac{1}{4}$, és $P(\xi_j = 1) = \frac{1}{4}$. Innen $E\xi_j = \frac{1}{2}$, $E\xi_j^2 = \frac{5}{2}$, $\operatorname{Var} \xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{9}{4}$, $ES = 5000$, $\operatorname{Var} S = (150)^2$. Innen $P(4850 < leS < 5300) = P\left(-1 \leq \frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < 2\right)$, és ez a centrális határeloszlástétel szerint közelítőleg $\Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185$.

5. Az a) b) és d) állítás igaz, a c) állítás hamis.