A február 10.-i gyakorlat feladatai

1. Egy pénzdarabot feldobunk kétszer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás lesz?

   Megoldás: A dobások lehetséges kimenete, (F,F), (F,I), (I,F) és (I,I). Ezen lehetséges kimenetelek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás, azaz az (F,I) vagy (I,F) dobássorozat következik be $\frac{1}{2}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás, azaz az (F,F), (F,I) vagy (I,F) dobássorozatok eredménye következik be, $\frac{3}{4}$.
2. Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?

   Megoldás: A dobások összegének eredménye akkor 9, ha a $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ vagy $(6,3)$ dobáspárok valamelyike következik be. Ezen dobássorozatok mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az összeg pontosan 9. Hasonlóan, az összeg akkor 10, ha a $(4,6)$, $(5,5)$ vagy $(6,4)$ dobáspárok valamelyike jelenik meg, és ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Jegyezzük meg, hogy a fenti tárgyalásban az egyes kimenetelek felsorolásában nemcsak azt vettük figyelembe, hogy milyen dobáseredmények jelentek meg, hanem azt is, hogy melyik kockán jelentek meg ezek a dobáseredmények. Miért?

   Házi feladat:

   Három szabályos dobókockát feldobunk. Mi annak a valószínűsége, hogy három hatos lesz a dobások eredménye? Annak, hogy két hatos és egy ötös? Annak, hogy egy egyes egy kettes és egy hármas?

Idézzünk fel néhány a valószínűségszámításban is fontos kombinatorikai eredményt.

3. Egy n elemű halmaznak $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ különböző részhalmaza van, $k\le n$.

   Megoldás: Feltehetjük, hogy a tekintett halmaz az $1,2,\dots,n$ számokból áll. Ebből $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)$ különböző módon választhatunk ki egymás után k számot. Viszont mivel két választás, amelyben ugyanazokat a számokat választottuk ki egymás után más sorrendben ugyanazt a halmazt adja, ezért minden halmazt $1\cdot 2\cdots k$ féle módon választottunk. Innen adódik az eredmény.
4. Az $1,2,\dots,n$ számokat $n!=1\cdot 2\cdots n$ módon lehet sorrendbe rakni.

   Megoldás: Az első helyen levő tagot n a második helyen levő tagot $n-1$ a harmadik helyen levő tagot $n-1$ féleképpen választhatjuk, és így tovább. Az összes választás lehetősége $n\cdots(n-1)\cdots(n-2)\cdots 1=n!$.
5. Egy urnában golyók vannak, amelyek tartalmazzák az $1,\dots,n$ számokat. Kihúzunk egymás után k golyót visszatevés nélkül. Hány különböző húzáseredmény lehetséges? Ha különbséget teszünk két olyan húzássorozat között, amelyekben ugyanazokat a számokat húztuk ki, de más sorrendben, akkor $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ lehetőség van, ha nem teszünk különbséget, akkor $\binom{n}{k}$.

Megoldás: Ha különbséget teszünk az olyan húzássorozatok között, amelyekben ugyanazokat a számokat húztuk, de más sorrendben, akkor az összes lehetséges húzássorozatok száma $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, mert az első számot n a másodikat $n-1$, és így tovább a k-ik számot $n-(k-1)$ féle módon választhatjuk. Így az összes lehetséges választás száma $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. A második kérdést ekvivalens módon úgyis átfogalmazhatjuk, hogy amennyiben a kihúzott k számot nagyság szerint monoton növekvő sorozatba rendezzük hány különböző sorozatot kaphatunk. Vegyük észre, hogy minden nagyság szerint monoton sorrendbe rakott sorozatot $k!$ különböző sorozat rendezéséből kaphatjuk meg. Ezért a válasz $\frac{n(n-1)\cdots)n-k+1)}{k!}$.

6. Ha visszatevéssel húzunk és különbséget teszünk különböző sorrendben kihúzott ugyanazokat a számokat (ugyanolyan multiplicitással) tartalmazó húzássorozatok között, akkor a lehetséges húzások száma n^k.

   Megoldás: Ebben az esetben mind az első, mind a második és így tovább mind a k-ik húzás n-féle módon lehetséges. Ezért az összes húzássorozat száma n^k.

   Az az eset, amikor visszatevéssel húzunk, de nem számít a különböző kihúzott számok sorrendje nehezebb, de egy ravasz észervétel segítségével megoldható. Ez a következő feladat tárgya.

7. Egy urnában golyók vannak, amelyek tartalmazzák az $1,\dots,n$ számokat. Kihúzunk egymás után visszatevéssel k golyót. A kihúzott golyókat nagyság szerint sorba rakjuk. Hány különböző húzáseredmény lehetséges?

   Válasz: $\binom{n+k-1}{k}$. Ugyanis tekintsünk egy kapott húzássorozatot. Az első számhoz adjunk 0-t a másodikhoz 1-et, a harmadikhoz 2-t, ... a k-ikhoz $k-1$-et. Ilyen módon egy szigorúan növekvő k hosszúságú sorozatot kapok amelyek elemei az $1,2,\dots,n+k-1$ számok valamelyikét veszik fel. Sőt, ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adunk a lehetséges kihúzott sorozatok és az $1,2,\dots,n+k-1$ halmaz k elemű részhalmazai között. Innen következik, hogy az adott tipusú sorozatok száma $\binom{n+k-1}{k}$.

   Foglaljuk össze, hogy milyen kombinatorikai eredményeket kaptunk.

   Egy urnában golyók vannak, amelyek tartalmazzák az $1,\dots,n$ számokat. Kihúzunk egymás után k golyót. Hány különböző húzáseredmény lehetséges?
   Ha visszatevés nélkül húzzuk ki a golyókat, és különbséget teszünk két húzássorozat között, amelyekben ugyanazokat a számokat húztuk ki, de más sorrendben, akkor $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ lehetőség van, ha nem teszünk különbséget közöttük, akkor $\binom{n}{k}$.
   Ha visszatevéssel húzzuk a golyókat és különbséget teszünk különböző sorrendben kihúzott ugyanazokat a számokat (ugyanolyan multiplicitással) tartalmazó húzássorozatok között, akkor a lehetséges húzássorozatok száma n^k.
   Ha visszatevéssel húzzuk a golyókat, és azokat húzás után nagyság szerint sorba rakjuk, akkor ilyen módon $\binom{n+k-1}{k}$ különböző húzássorozat keletkezhet.

8. Binomiális tétel:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}a^nb^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k},$$

ahol $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.

Magyarázat: Végezzük el az $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ tényező}}$ szorzásokat. Ez olyan n hosszúságú szorzatokból álló összeg lesz, amely a és b számokból fog állni. Hány olyan tag szerepel, amely k a és $n-k$ b jegyet tartalmaz? A fenti kombinatorikai meggondolások alapján látható, hogy $\binom{n}{k}$.

Tárgyaltuk a binomiális tétel egy általánosítását is. Ennek érdekében bevezettük a következő definiciót: Ha k pozitív egész szám, n pedig *tetszőleges valós szám* akkor $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$. Fontos, hogy ez a definició nemcsak egész n számokra van definiálva. Ki akarjuk számolni az $(1+x)^n$ függvény Taylor sorát tetszőleges (valós) n számra.

9. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = (1+x)^n$ függvény Taylor sora az

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

hatványsor tetszőleges valós n szám esetén.

Megoldás: Egy (analitikus) $f(x)$ függvény hatványsora $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, ahol $c_0 = f(0)$, $c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k} f(x)\Big|_{x=0}$. Jelen esetben, amikor $f(x) = (1+x)^n$, $\frac{d^k}{dx^k} f(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}$, ahonnan $c_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$. Ezért az $(1+x)^n$ függvény hatványsora $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$.

10. Bizonyítsuk be a következő azonosságot: Minden nem negatív n, m és k egész számokra (tegyük fel, hogy $n+m \geq k$)

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

Megoldás: A következő kombinatorikai meggondolás bizonyítást ad. Számoljuk ki két különböző módon annak valószínűségét, hogy egy urnából, amelyben $n+m$ (megkülönböztethető) golyó van, hányféleképp választhatunk ki k golyót. Ez egyrészt $\binom{n+m}{k}$, ami a baloldali kifejezéssel egyenlő. Fessünk n golyót piros és m golyót fehér színűre. Ekkor $\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$ féle módon választhatunk ki k golyót úgy, hogy ezek közül s piros és $k-s$ fehér. Ezeket a kifejezéseket összegezve minden $0 \leq s \leq k$ számra egyrészt megkapjuk az azonosság jobboldalán szereplő kifejezést, másrészt a balaldalon szereplő kifejezést számoltuk ki más módon.

Második megoldás: Érdekes lehet a következő megoldás, ami valójában általánosabb eredményt ad, mert azt mutatja, hogy az eredmény tetszőleges valós n és m számra érvényes. Azt használjuk ki, hogy egy függvény egyértelműen meghatározza a

Taylor sorának együtthatója, másrészt Taylor sorokkal (tehát végtelen összegekkel ugyanúgy lehet számolni, mint véges összegekkel.
Írjuk fel, mit jelent az $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m$ azonosság e függvények hatványsoraira. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m}{k} x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k\right).$$

Az azonosság baloldalán x^k együtthatója $\binom{n+m}{k}$, a jobb oldalon elvégezve a szorzásokat olyan kifejezést kapunk, amelyben x^k együtthatója $\sum\limits_{s=0}^{k} \binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$, és ez a két kifejezés megegyezik.

De Méré lovag problémája:

Az itt tárgyalt két probléma történetileg is érdekes. Ezekkel a kérdésekkel fordult de Méré lovag Pascalhoz. Sokan e feladat megoldásától, illetve Pascalnak és Fermat-nak e probléma megoldásáról szóló levelezésétől számítják a valószínűségszámítás megszületését.

11a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz.

11b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, amelynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Megoldás:

a.) Annak a valószínűsége, hogy egy dobás eredménye nem hatos $\frac{5}{6}$, annak pedig, hogy 4 egymás utáni dobásban nem jelenik meg a hatos $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Annak a valószínűsége, hogy négy dobásban megjelenik egy hatos $P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy két kocka dobásában nem jelenik meg a dupla hatos $\frac{35}{36}$, annak a valószínűsége, hogy ez 24 dobásban nem jelenik meg $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Annak a valószínűsége, hogy 24 dobásban megjelenik egy dupla hatos $P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Érdemes megérteni, hogy a P_1 és P_2 valószínűségek miért vannak olyan közel egymáshoz. Vezessük be az $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots,$ számokat. Ekkor $1 - P_1 = a_6^{2/3}$, $1 - P_2 = a_{36}^{2/3}$. Viszont tanultuk az analízisben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$, $e = 2.71\dots$. Továbbá ez az a_n sorozat elég gyorsan tart a határértékéhez, ezért az $a_6 \sim e^{-1}$ és $a_{36} \sim e^{-1}$ elég jó közelítés. Ezért mind a P_1 mind a P_2 valószínűség jól közelíthető az $1 - e^{-2/3}$ számmal. Továbbá ismeretes, hogy az a_n sorozat monoton nő, és innen adódik, hogy $P_1 > P_2$. Történetesen az $1 - e^{-2/3} \sim 0.49$ szám közel van $\frac{1}{2}$-hez, és a P_1 és P_2 valószínűségek az $\frac{1}{2}$ számot közrefogják. A P_1 szám értéke $\frac{1}{2}+\frac{23}{1296}\sim 0.52$.

b.) Tekintsük azt az általánosabb problémát, amikor n nyerés kell a tét megszerzéséhez, és az első játékos k a második pedig l alkalommal nyert. Tekintsük a következő $(n-k)+(n-l)-1=2n-k-l-1$ fordulót. Az első játékos akkor és csak akkor nyerné el a tétet, ha ezekben a fordulókban legalább $n-k$ alkalommal nyer. Ennek valószínósége $P=2^{k+l+1-2n}\sum\limits_{j=n-k}^{2n-k-l-1}\binom{2n-k-l-1}{j}$. Jelen esetben az első játékos $\frac{7}{8}$, a második játékos $\frac{1}{8}$ valószínűséggel nyeri el a tétet. Az igazságos tehát a $7:1$ arányú osztozkodás.

Történeti megjegyzés.

A matematika-történészek kiderítették, mindkét most tárgyalt feladat jóval korábban ismert volt, mielőtt de Méré lovag kitűzte őket. Az a) feladat eredeti megfogalmazásában azt kérdezzük, hogy hányszor kell feldobni két kockát ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 2 hatost dobunk nagyobb legyen, mint 1/2. De Méré maga is megoldotta ezt a feladatot, de sajnos, ... két módszerrel, amelyek különböző eredményre vezettek: 24 és 25 dobás. De Méré biztos volt abban, hogy a két módszer egyformán megbízható, ezért a matematika ,,ingatagságát" hibáztatta. Pascal, miután meggyőződött arról, hogy a helyes válasz 25, le sem írta a megoldást. (De Méré lovag úgy gondolta, hogy ha négy dobás elegendő ahhoz, hogy egy kockával legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel hatost dobjunk, akkor minthogy annak a valószínűsége, hogy két kocka mindegyikével hatost dobunk $\frac{1}{6}$-szor kisebb mint annak, hogy egy kockával dobunk hatost, ezért (szerinte) 6-szor több, tehát $4\times 6=24$ dobás kell ahhoz, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be két hatos dobás.

Nem kötelező házi feladat:

Lássuk be, hogy az $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat valóban monoton növekszik.
Segítség: Lássuk be, hogy az a_n sorozat ,,folytonos kiterjesztése" a valós számokra, az $a(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ függvény, illetve annak logaritmusa az $f(x)=x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$ függvény monoton nő az $x\geq 1$ félegyenesen. Ennek érdekében mutassuk meg, hogy $f(x)$ konkáv függvény, amelynek deriváltja a végtelenben nullához tart.)