Az május 4.-i gyakorlat feladatai

1.) Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x \ge 0$, és $f(x) = 0$, ha $x > 0$. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

Általánosabban, legyenek $\xi_1, \dots \xi_m$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda > 0$ paraméterrel. Számítsuk ki $\xi_1 + \dots + \xi_m$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Ki kell számolnunk az $f * f(x)$ illetve $\underbrace{f * \dots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x) = 0$, ha $x \le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y \le 0$ vagy $x - y \le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x \ge 0$ esetén lehet nulla, az $x \le 0$ esetben $f(y)f(x-y) > 0$ minden y-ra nulla, és $x \ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y) > 0$ integrandus csak $0 \le y \le x$ esetén nem nulla. Innen a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_2(x) = f * f(x)$ $x < 0$-ra $f_2(x) = 0$, és

$$
\begin{aligned}
f_2(x) = f * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\
&= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

Hasonlóan, ha $f_m(x) = \underbrace{f * \dots * f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1 + \cdots \xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x) = 0$ minden $m \ge 1$ számra, ha $x < 0$. Azt állítjuk, hogy $f_m(x) = \dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1} * f(x) = f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$
\begin{aligned}
f_{m-1} * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy = \int_0^x \lambda^{m-1} \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(x-y)}\,dy \\
&= \lambda^m e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad \text{ha } x \ge 0.
\end{aligned}
$$

Másrészt $f_m(x) = 0$, ha $x \le 0$.

2.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, mind a kettő $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x}$, $-\infty < x < \infty$, sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be először, hogy $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Az $f(x)$ függvény minden pontban nem negatív. Annak ellenőrzéséhez, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatnunk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Viszont hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x\,dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2} \left[e^x\right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$.

A $\xi + \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy$ formula segítségével számíthatjuk ki. Számítsuk ki ezt az integrált. Tekintsük először azt az esetet, amikor $x \ge 0$. Az integrált számítsuk ki úgy, hogy nézzük mind a négy (elvileg) lehetséges esetet, amikor a) $y \ge 0$ és $x - y \ge 0$, b) $y \ge 0$ és

$x-y<0$, c) $y<0$, $x-y\ge 0$, d) $y<0$, $x-y<0$. Számítsuk ki mind a négy esetben azt, hogy milyen tartományban veszi fel értékét az y változó, és mi az integrandus illetve az integrál értéke ebben a tartományban. Az a) esetben $0\le y\le x$, az integrandus $f(y)f(x-y)=\frac{1}{4}e^{-y}e^{-(x-y)}=\frac{e^{-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{xe^{-x}}{4}$ az a) tartományban. A b) esetben $y>x$ és $f(y)f(x-y)=\frac{e^{-y}e^{x-y}}{4}=\frac{e^{x-2y}}{4}$ az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_x^\infty e^{x-2y}\,dy=\frac{e^{-x}}{8}$, a c) esetben $y<0$ és $f(y)f(x-y)=\frac{1}{4}e^{y}e^{-(x-y)}=\frac{e^{2y-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^0 e^{2y-x}\,dy=\frac{e^{-x}}{8}$, a d) eset nem lehetséges, mert ekkor egyrészt az $y<0$ másrészt az $y>x\ge 0$ feltételeknek kellene teljesülniük. Innen azt kapjuk, hogy $g(x)=\frac{(x+1)e^{-x}}{4}$, ha $x>0$. Mivel f szimmetrikus függvény, ezért mint nem nehéz megmutatni, $f(x)$ is az. Tehát $g(-x)=g(x)$, és $g(x)=\frac{(|x|+1)e^{-|x|}}{4}$.

3.) Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mutassuk meg, hogy $\xi-\eta$ sűrűségfüggvénye a $h(x)=\int_{-\infty}^\infty f(x+y)g(y)\,dy$ függvény. Értsük meg e formula szemléletes tartalmát is.

Megoldás Legyen $\bar\eta=-\eta$. Ekkor $\bar\eta$ sűrűségfüggvénye $g(-x)$, ξ és $\bar\eta$ függetlenek és $\xi-\eta=\xi+\bar\eta$. Innen $\xi-\eta$ sűrűségfüggvénye $h(x)=\int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(-y)\,dy$, és elvégezve az $\bar y=-y$ helyettesítést az integrálban megkapjuk a kívánt állítást.

Szemléletes (nem precíz) magyarázat: Annak valószínűsége, hogy a $\xi-\eta$ valószínűségi változó az $[x,x+dx]$ intervallumba esik $h(x)\,dx$. Ez úgy következhet be, hogy az a ξ valószínűségi változó valamely $x+y$ értéket vesz fel, az η pedig az $[y,y+dx]$ intervallumba esik aminek valószínűsége $f(x+y)g(y)\,dx$, az y pedig tetszőleges, azaz e változóra összegezni, illetve folytonos értékű lévén integrálni kell. Ez azt jelenti, hogy $h(x)\,dx=\left(\int f(x+y)g(y)\,dy\right)\,dx$. Hasonló módon megmagyarázható a konvolució formula is.)

4.) Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az $\eta=a\xi+b$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, $a>0$ $g(x)=\frac{1}{a}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Megoldás: Jelölje $F(x)=\int_{-\infty}^\infty f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor η eloszlásfüggvénye $G(x)=P(\eta<x)=P(a\xi+b<x)=P\left(\xi<\frac{x-b}{a}\right)$, sűrűségfüggvénye pedig $g(x)=\frac{dG(x)}{dx}=\frac{d}{dx}F\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{1}{a}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

5.) Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Negoldás: Jelölje ξ_j, $j=1,2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, amelyre $f(x)=2$, ha $0\le x\le\frac{1}{2}$, és $f(x)=0$ egyébként. Minket a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x)=f*f(x)$, ahonnan $g(x)=2-|2-4x|$, ha $0\le x\le 1$, $g(x)=0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, amelyet a a következő képletek adnak meg: $F(u)=0$, ha $u\le 0$, $F(u)=1-2u^2$, ha $0\le u\le\frac{1}{2}$, $F(u)=1-2(1-u)^2=4u-2u^2-1$, ha $\frac{1}{2}\le u\le 1$. Ha $u\ge 1$, akkor $F(u)=1$.

6.) Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás: Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2} \le \xi_1 - \xi_2 \le \frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u) = P(\xi_1 - \xi_2 < u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u) = f_1 * f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f_1(u) = 0$, különben, $f_2(u) = 1$, ha $-1 \le u \le 0$, $f_2(u) = 0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} g(u)\,du$ integrál. Továbbá,

$$g(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x-u)\,du, \quad -\infty < x < \infty,$$

ahol $f(u) = 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2}$, $f(u) = 0$, ha $u \ge \frac{1}{2}$.

A korábbi feladatok megoldásából következik, hogy $g(u) = 1 - u$, ha $0 < u < 1$ $g(u) = 1 + u$, ha $-1 < u < 0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - |u|)\,du = \frac{3}{4}$.

7.) Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is vesztünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, és η_j $1 \le j \le 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j = 1$, ha a j-ik érmedobás eredménye fej, és $\eta_j = 0$, ha a j-ik érmedobás írás. Legyen $\zeta_j = \xi_j \eta_j$. Ekkor a j-ik dobásnál a nyereményünk ζ_j lesz, $1 \le j \le 3300$, és a $P\left(3190 \le \sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független ζ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j = E\xi_j\eta_j = E\xi_j E\eta_j = \frac{1}{6}(2+4+6)\frac{1}{2} = 1$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36)\cdot\frac{1}{2} = \frac{14}{3}$, $\operatorname{Var}\zeta_j^2 = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \le \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \le 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum\limits_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{3300} \operatorname{Var}\xi_j}} \le \frac{220}{\sqrt{3300\frac{11}{3}}}\right)$$

$$\sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

8.) Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, amely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kellválasszanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 30\,000$, $S = S_{30000} = \sum\limits_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\dfrac{3}{4}$, $E\xi_j = \dfrac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \dfrac{3}{16}$, $ES = 30\,000 E\xi_j = 22\,500$, $\operatorname{Var} S = 30\,000 \operatorname{Var}\xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{k - 22\,500}{75}\right)$$
$$\sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\dfrac{k - 22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\dfrac{22\,500 - k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\dfrac{22\,500 - k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \times 1.28$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \times 1.28 = 22\,212$ és $p = \dfrac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \ge \dfrac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

9.) Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0, 2]$ intervalumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke x-nél kisebb $\dfrac{x}{2}$-vel egyenlő, ha $0 \le x \le 2$, eggyel egyenlő, ha $x \ge 2$, és nulla, ha $x \le 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, melyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, melyek értéke, nagyobb mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megőrzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 24\,000$, valószínűségi változókat: $\xi_j = x$, ha a j-ik ledobott pont értéke x, és $0 \le x \le 1$, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik ledobott pont értéke az $(1, 2]$ intervallumba esik. Ekkor a megőrzött pontok összege $S=\sum\limits_{j=1}^{24\ 000}\xi_j$, továbbá a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ezért a centrális határeloszlástétel segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklő $P(5900<S<6075)$ valószínűségre. Ennek érdekében ki kell számolnunk a ξ_1 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. Vegyük észre, hogy ugyan a ξ_1 valószínúségi változónak nincs sűrűségfüggvénye, és nem diszkrét eloszláaú, viszont anak F eloszlásfüggvénye felírható $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$ alakban, ahol $F_1(x)$ nek van sűrűségfüggvénye, ami az $f(x)=\frac12$ függvény a $[0,1]$ intervallumon, és $f(x)=0$, ha $x<0$ vagy $x>1$, és $F_2(x)$ olyan mértéket határoz meg, amelyik a nullába van koncentrálva, és a nulla mértéke $\frac12$. Pontosabban, tetszőleges A halmaz valószínűsége $P(A)=\int_A F(\,dx)=\int_A F_1(\,dx)+\int_A F_2(\,dx)=\int_A \frac12\,dx+\int_A F_2(\,dx)$, ahol $\int_A F_2(\,dx)=\frac12$, ha $0\in A$, és $\int_A F_2(\,dx)=0$, ha $0\notin A$. Ekkor tetszőleges $h(x)$ függvényre $Eh(\xi)=\int h(x)F(\,dx)=\int h(x)F_1(\,dx)+\int h(x)F_2(\,dx)=\int_0^1\frac12 h(x)\,dx+\frac12 h(0)$. Ezért

$$E\xi_1=\frac12\int_0^1 x\,dx=\frac14,\qquad E\xi_1^2=\frac12\int_0^1 x^2\,dx=\frac16,$$

$\operatorname{Var}\xi_1=\dfrac16-\dfrac1{16}=\dfrac5{48}$, és $ES=6000$, $\operatorname{Var}S=2500$. Innen

$$\begin{aligned}P(5900<S<6075)&=P\left(-2<\frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var}S}}<1.5\right)\\&\sim\Phi(1.5)-\Phi(-2)=\Phi(1.5)+\Phi(2)-1.\end{aligned}$$